1988 年東大文 $\boxed{4}$

$f(x)=x^3-x^2$ より　$f'(x)=3x^2-2x$　$\therefore f'(1)=1$　点 A における $y=f(x)$ の接線は　$y=x-1$

$x^3-x^2=x-1$ とすると　$x^2(x-1)-(x-1)=0$　$(x+1)(x-1)^2=0$　したがって、B の座標は $(-1,\ -2)$

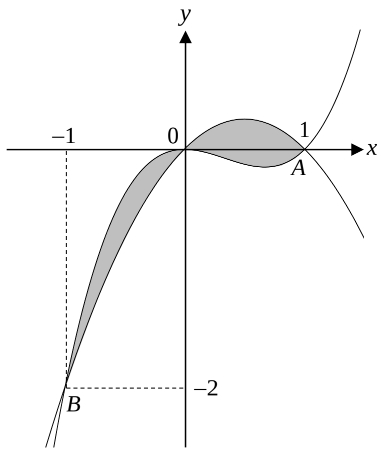
$y=ax^2+bx+c$ が $A,\ B$ を通るとき　$a+b+c=0,\ a-b+c=-2$　$\therefore b=1,\ c=-a-1$

$x^3-x^2=ax^2+x-(a+1)$ とすると　$x^3-(a+1)x^2-x+(a+1)=0$　$\{x-(a+1)\}(x-1)(x+1)=0$

もう 1 つの共有点が A と B の間にあることから　$-1<a+1<1$　$\therefore -2<a<0$

したがって、$y=ax^2+x-(a+1)$ は上に凸。

2 曲線で囲まれる部分を図示すると右図のようになり、面積は



$$
\begin{aligned}
S&=\int_{-1}^{a+1}\left\{(x^3-x^2)-(ax^2+x-a-1)\right\}dx+\int_{a+1}^{1}\left\{(ax^2+x-a-1)-(x^3-x^2)\right\}dx\\
&=\int_{-1}^{a+1}\left\{x^3-(a+1)x^2-x+(a+1)\right\}dx+\int_{a+1}^{1}\left\{-x^3+(a+1)x^2+x-(a+1)\right\}dx\\
&=\left[\frac{x^4}{4}-(a+1)\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+(a+1)x\right]_{-1}^{a+1}+\left[-\frac{x^4}{4}+(a+1)\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-(a+1)x\right]_{a+1}^{1}\\
&=\frac{1}{2}(a+1)^4-\frac{2}{3}(a+1)^4-(a+1)^2+2(a+1)^2\\
&\qquad-\frac{1}{4}-\frac{a+1}{3}+\frac{1}{2}+(a+1)-\frac{1}{4}+\frac{a+1}{3}+\frac{1}{2}-(a+1)\\
&=-\frac{1}{6}(a+1)^4+(a+1)^2+\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots(答)
\end{aligned}
$$

$S=-\dfrac{1}{6}\left\{(a+1)^2-3\right\}^2+2$ であり、$-1<a+1<1$ より $0\leqq(a+1)^2<1$ であるから、

S は $(a+1)^2=0$ のとき、$a=-1$ のとき最小となる。したがって　$\therefore a=-1,\ b=1,\ c=0$　$\cdots\cdots$(答)