1988年東大理$\boxed{1}$文$\boxed{2}$共通

一次変換 f を表す行列を、$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると

(i) より $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ は第4象限にある。　$\therefore a>0,\ c<0$

(ii) より $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ は第2象限にある。　$\therefore b<0,\ d>0$

(iii) より $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$ は第1象限にある。　$\therefore a+b>0,\ c+d>0$

$\det A=ad-bc=(a+b)d-b(c+d)$ であり、$a+b>0,\ d>0,\ -b>0,\ c+d>0$ より　$\therefore \det A>0$

したがって $\det A\neq 0$ であるから、A は逆行列 A^{-1} を持ち、f の逆変換 f^{-1} が存在する。（証明終）

次に、$A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ であり、ある第1象限の点 $Q\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ が f^{-1} によって移る点 $f^{-1}(Q)$ は

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} dp-bq \\ -cp+aq \end{pmatrix}$$

$ad-bc>0$ はわかっており、$p>0,\ q>0,\ a>0,\ -b>0,\ -c>0,\ d>0$ より　$\therefore dp-bq>0,\ -cp+aq>0$

したがって、点 P の f による像 $f(P)$ が第1象限にあるとき、元の点 P も第1象限にある。（証明終）