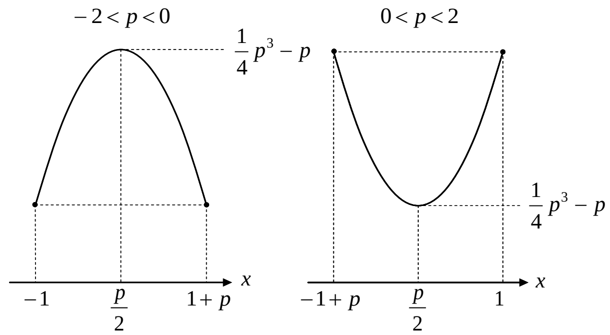
1988年東大理$\boxed{3}$

曲線$C: y=x^3-x\,(-1\leqq x\leqq 1)$を、$x$方向に$p$、$y$方向に$q$平行移動した曲線を、
曲線$C': y=(x-p)^3-(x-p)+q\,(-1+p\leqq x\leqq 1+p)$とする。$C$と$C'$がただ1つの共有点を持つ条件を考える。
CとC'の定義域に共通範囲があるため、$-1+p<1\quad -1<1+p\quad \therefore -2<p<2$ ——①
①の条件下で$x^3-x=(x-p)^3-(x-p)+q$とすると、$3px^2-3p^2x+p^2-p-q=0$ ——②
②において$p=0$とすると$q=0$となり、CとC'が一致するので不適。$\therefore p\neq 0$ ——③

$q=3px^2-3p^2x+p^2-p=3p\left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}p^3-p\qquad f(x)=3p\left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}p^3-p$とおくと、

i）$-2<p<0$のとき
　$-1\leqq x\leqq 1+p\quad f(-1)=f(1+p)=p(p+1)(p+2)$
ii）$0<p<2$のとき
　$-1+p\leqq x\leqq 1\quad f(-1)=f(1+p)=p(p-1)(p-2)$



結局、$y=q$と$y=f(x)$がただ1つの共有点を持つ条件は

$\therefore q=\dfrac{1}{4}p^3-p$ ——④

以下、①、③、④の条件下で考える。

C'は$y=(x-p)^3-(x-p)+\dfrac{1}{4}p^3-p=-\dfrac{3}{4}p^3+3xp^2-3x^2p+x^3-x\,(-1+p\leqq x\leqq 1+p)$となる。

$g(p)=-\dfrac{3}{4}p^3+3xp^2-3x^2p+x^3-x$とおき、$x-1\leqq p\leqq x+1$の範囲で、$y=g(p)$となる相違なる$p$が3つ存在する条件を考えればよい。$g'(p)=-\dfrac{9}{4}p^2+6xp-3x^2=-\dfrac{9}{4}\left(p-\dfrac{2}{3}x\right)(p-2x)$

$x=0$のとき、$g'(p)=-\dfrac{9}{4}p^2<0$となり、$g(p)$は単調減少となるので不適。したがって$x\neq 0$。

i）$x>0$のとき$0<\dfrac{2}{3}x<2x$で、$x-1<\dfrac{2}{3}x$、$2x<x+1$であり、$x<3$、$x<1$より、結局$0<x<1$。

p	$x-1$	$\cdots$	$\frac{2}{3}x$	$\cdots$	$2x$	$\cdots$	$x+1$
$g'(p)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(p)$		↘		↗		↘	

$g(p)$の増減は左の通り。

$$g\left(\frac{2}{3}x\right)=-\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{27}x^3+3x\cdot\frac{4}{9}x^2-3x^2\cdot\frac{2}{3}x+x^3-x=\frac{1}{9}x^3-x$$

$$g(2x)=-\frac{3}{4}\cdot 8x^3+3x\cdot 4x^2-3x^2\cdot 2x+x^3-x=x^3-x=g(0)<g(x-1)\,(\because x-1<0)$$

$$g(x+1)=-\frac{3}{4}\cdot(x+1)^3+3x\cdot(x+1)^2-3x^2\cdot(x+1)+x^3-x=(x+1)\left\{-\frac{3}{4}\cdot(x+1)^2+3x\cdot(x+1)-3x^2+x(x-1)\right\}$$
$$=(x+1)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-1)$$

ここで、

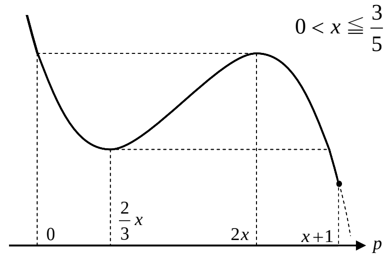
$$g(x+1)-g\left(\frac{2}{3}x\right)=\frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-1)-\frac{1}{9}\cdot x(x+3)(x-3)=(x+3)\left\{\frac{1}{4}\cdot(x+1)(x-1)-\frac{1}{9}\cdot x(x-3)\right\}$$

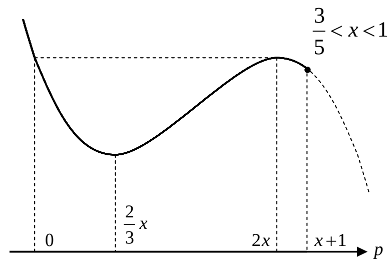
$$=(x+3)\left(\frac{5}{36}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{36}(x+3)^2\left(x-\frac{3}{5}\right)$$

より、$0<x\leqq\frac{3}{5}$ のとき $g(x+1)\leqq g\left(\frac{2}{3}x\right)$、$\frac{3}{5}<x<1$ のとき $g(x+1)>g\left(\frac{2}{3}x\right)$

$0<x\leqq\frac{3}{5}$ のとき　$g\left(\frac{2}{3}x\right)<y<g(2x)$

$\frac{3}{5}<x<1$ のとき　$g(x+1)\leqq y<g(2x)$





ii）$x<0$ のとき $2x<\frac{2}{3}x<0$ で、$x-1<2x$、$\frac{2}{3}x<x+1$ であり、$-1<x$、$-3<x$ より、結局 $-1<x<0$。

p	$x-1$	$\cdots$	$2x$	$\cdots$	$\frac{2}{3}x$	$\cdots$	$x+1$
$g'(p)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(p)$		↘		↗		↘	

$g(p)$ の増減は左の通り。

$$g(2x)=x^3-x=g(0)>g(x+1)\,(\because x+1>0)\qquad g\left(\frac{2}{3}x\right)=\frac{1}{9}x^3-x$$

$$g(x-1)=g\{(x-2)+1\}=\frac{1}{4}\{(x-2)+3\}\{(x-2)+1\}\{(x-2)-1\}=\frac{1}{4}(x+1)(x-1)(x-3)$$

ここで、

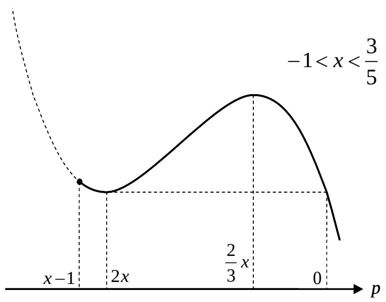
$$g(x-1)-g\left(\frac{2}{3}x\right)=\frac{1}{4}(x+1)(x-1)(x-3)-\frac{1}{9}\cdot x(x+3)(x-3)=(x-3)\left\{\frac{1}{4}\cdot(x+1)(x-1)-\frac{1}{9}\cdot x(x+3)\right\}$$

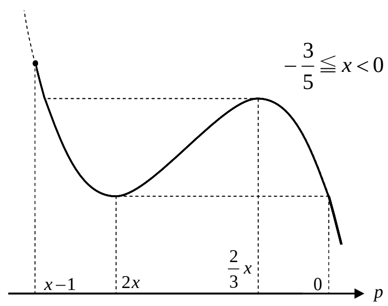
$$=(x-3)\left(\frac{5}{36}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{36}(x-3)^2\left(x+\frac{3}{5}\right)$$

より、$-1<x<-\frac{3}{5}$ のとき $g(x-1)<g\left(\frac{2}{3}x\right)$、$-\frac{3}{5}\leqq x<0$ のとき $g(x-1)\geqq g\left(\frac{2}{3}x\right)$

$-1<x<-\frac{3}{5}$ のとき　$g(2x)<y\leqq g(x-1)$

$-\frac{3}{5}\leqq x<0$ のとき　$g(2x)<y<g\left(\frac{2}{3}x\right)$





以上まとめて、

$$\therefore \begin{cases} -1<x<-\dfrac{3}{5} \text{のとき} & x^3-x<y \leqq \dfrac{1}{4}(x+1)(x-1)(x-3) \\ -\dfrac{3}{5} \leqq x<0 \text{のとき} & x^3-x<y<\dfrac{1}{9}x^3-x \\ 0<x \leqq \dfrac{3}{5} \text{のとき} & \dfrac{1}{9}x^3-x<y<x^3-x \\ \dfrac{3}{5}<x<1 \text{のとき} & \dfrac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-1) \leqq y<x^3-x \end{cases}$$

図示すると下の通り。境界線は実線部のみ含み、各交点は含まない。