1988 年東大理 $\boxed{4}$

原点を P_0 とし、P_0 から出発して y 座標が整数値になる点を、順に $P_1,\ P_2,\ P_3,\ \cdots,\ P_n,\ \cdots$ とおく。

$P_{n-1}P_n$ の傾きは as^{n-1} であり、P_{n-1} と P_n の y 座標の差は 1 であるから、P_n の x 座標は　$\therefore x_n=\dfrac{1}{a}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{s}\right)^{k-1}$

P が描く折れ線が $x=b$ を横切る条件は、$x_n \geqq b$ となる n が存在することである。

$\dfrac{1}{s}>1$ のとき、すなわち $0<s<1$ のとき

$x_n=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{1}{s}\right)^n-1}{\dfrac{1}{s}-1}=\dfrac{s}{a(1-s)}\left\{\left(\dfrac{1}{s}\right)^n-1\right\}$ は発散するので、n を大きくしていけば必ず $x_n \geqq b$ となる。

$\dfrac{1}{s}=1$ のとき、すなわち $s=1$ のとき

$x_n=\dfrac{n}{a}$ は発散するので、n を大きくしていけば必ず $x_n \geqq b$ となる。

$0<\dfrac{1}{s}<1$ のとき、すなわち $s>1$ のとき

$x_n=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{s}\right)^n}{1-\dfrac{1}{s}}=\dfrac{s}{a(s-1)}\left\{1-\left(\dfrac{1}{s}\right)^n\right\}$ は収束し、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{s}{a(s-1)}$ であるから、$b \geqq \dfrac{s}{a(s-1)}$ であれば、

$x_n \geqq b$ となることはない。したがって、$b<\dfrac{s}{a(s-1)}$ でなければならない。

以上により、求める条件は　$s \leqq 1$　または　$s>1,\ b<\dfrac{s}{a(s-1)}$　……(答)