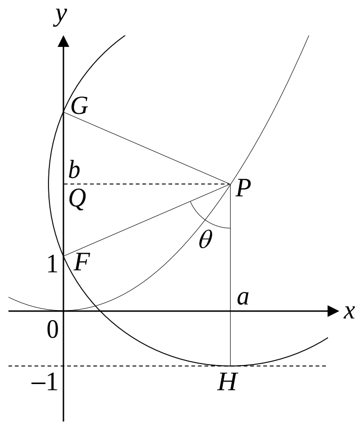
1989年東大理 $\boxed{2}$

$P(a,\ b)$ としたとき、$PF=PH$ より　$a^2+(b-1)^2=(b+1)^2$　$\therefore b=\dfrac{1}{4}a^2$

$\angle FPH=\theta$ とすると



$$\sin\theta=\frac{a}{PF}=\frac{a}{b+1}=\frac{a}{\frac{1}{4}a^2+1}=\frac{4a}{a^2+4}\qquad \tan\theta=\frac{a}{b-1}=\frac{a}{\frac{1}{4}a^2-1}=\frac{4a}{a^2-4}$$

$S(a)=\dfrac{1}{2}PH^2\theta$ で、$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき、$\sin\theta<\theta<\tan\theta$ より

$$\frac{1}{2}PH^2\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a^2+4)^2}{16}\cdot\frac{4a}{a^2+4}=\frac{a(a^2+4)}{8}$$

$$\frac{1}{2}PH^2\tan\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{(a^2+4)^2}{16}\cdot\frac{4a}{a^2-4}=\frac{a(a^2+4)^2}{8(a^2-4)}$$

$$\frac{a(a^2+4)}{8}<S(a)<\frac{a(a^2+4)^2}{8(a^2-4)}\qquad \therefore \frac{8(a^2-4)}{a(a^2+4)^2}<\frac{1}{S(a)}<\frac{8}{a(a^2+4)}\quad \text{——①}$$

一方、P から y 軸に下ろした垂線の足を Q とすると、$PF=PG,\ PQ=a,\ QF=\dfrac{1}{4}a^2-1$ より

$$T(a)=\frac{1}{2}\cdot 2\left(\frac{1}{4}a^2-1\right)\cdot a=\frac{a(a^2-4)}{4}$$

①に辺々かけると　$\therefore 2\left(\dfrac{a^2-4}{a^2+4}\right)^2<\dfrac{T(a)}{S(a)}<2\cdot\dfrac{a^2-4}{a^2+4}$

$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{a^2-4}{a^2+4}=\lim_{a\to\infty}\frac{1-\frac{4}{a^2}}{1+\frac{4}{a^2}}=1$ であるから、はさみうちの原理より　$\displaystyle\therefore \lim_{a\to\infty}\frac{T(a)}{S(a)}=2$　……(答)