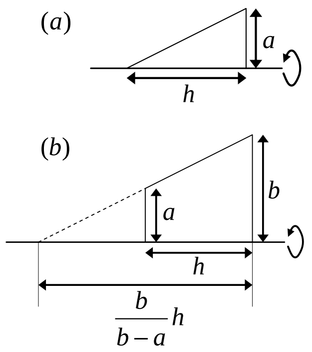
1990年東大文 $\boxed{4}$



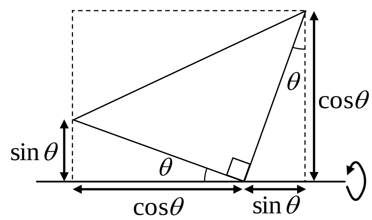
まず、図(a), (b)のような回転体の体積を求めておく。

(a)のとき、円錐になるから　$\therefore V=\frac{1}{3}\pi a^2 h$

(b)のとき、$a<b$ として、2つの円錐の体積の差になるから、

$$\therefore V=\frac{1}{3}\pi b^2\cdot\frac{b}{b-a}h-\frac{1}{3}\pi a^2\cdot\frac{a}{b-a}h=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{b^3-a^3}{b-a}h=\frac{1}{3}\pi(b^2+ab+a^2)h$$

(I)　回転軸が直角を共有するとき　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ として、体積を $V_1(\theta)$ とすると

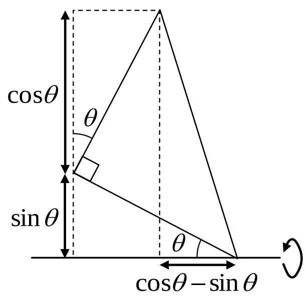


$$\begin{aligned}V_1(\theta)&=\frac{1}{3}\pi(\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta)(\sin\theta+\cos\theta)\\&\quad-\frac{1}{3}\pi\sin^2\theta\cos\theta-\frac{1}{3}\pi\cos^2\theta\sin\theta\\&=\frac{1}{3}\pi(1+\sin\theta\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta)-\frac{1}{3}\pi\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)\\&=\frac{1}{3}\pi(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi$ より、$V_1(\theta)$ は $\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ 、$\theta=0,\frac{\pi}{2}$ のとき最小値 $\frac{\pi}{3}$ をとる。

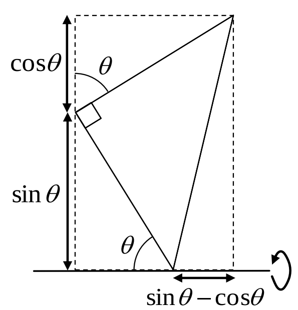
(II)　回転軸が直角を共有しないとき　$0<\theta\leqq\frac{3}{4}\pi$ として、体積を $V_2(\theta)$ とすると

i)　$0<\theta\leqq\frac{\pi}{4}$



$$\begin{aligned}V_2(\theta)&=\frac{1}{3}\pi\left\{\sin^2\theta+\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta+\cos\theta)^2\right\}\sin\theta\\&\quad+\frac{1}{3}\pi(\sin\theta+\cos\theta)^2(\cos\theta-\sin\theta)-\frac{1}{3}\pi\sin^2\theta\cos\theta\\&=\frac{1}{3}\pi(2\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta)\sin\theta+\frac{1}{3}\pi(\sin\theta+\cos\theta)^2\cos\theta-\frac{1}{3}\pi\sin^2\theta\cos\theta\\&=\frac{2}{3}\pi(1-\cos^2\theta)\sin\theta+\frac{1}{3}\pi(1+2\sin\theta\cos\theta)\cos\theta=\frac{1}{3}\pi(2\sin\theta+\cos\theta)\end{aligned}$$

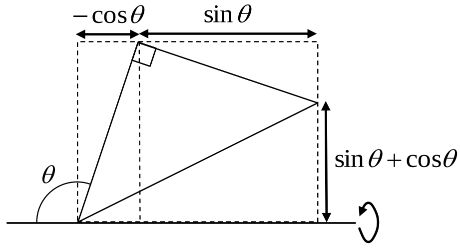
ii)　$\frac{\pi}{4}<\theta\leqq\frac{\pi}{2}$



$$\begin{aligned}V_2(\theta)&=\frac{1}{3}\pi\left\{\sin^2\theta+\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta+\cos\theta)^2\right\}\sin\theta\\&\quad-\frac{1}{3}\pi(\sin\theta+\cos\theta)^2(\sin\theta-\cos\theta)-\frac{1}{3}\pi\sin^2\theta\cos\theta\\&=\frac{1}{3}\pi(2\sin\theta+\cos\theta)\quad(\because i)より)\end{aligned}$$

ｉｉｉ）　$\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi$

$$V_2(\theta) = \frac{1}{3}\pi\left\{\sin^2\theta + \sin\theta(\sin\theta+\cos\theta) + (\sin\theta+\cos\theta)^2\right\}\sin\theta$$
$$+\frac{1}{3}\pi\sin^2\theta(-\cos\theta) - \frac{1}{3}\pi(\sin\theta+\cos\theta)^2(\sin\theta-\cos\theta)$$
$$=\frac{1}{3}\pi(2\sin\theta+\cos\theta) \quad (\because i)より)$$



結局、$0 < \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ において、$V_2(\theta) = \dfrac{1}{3}\pi(2\sin\theta+\cos\theta)$ となる。

$$V_2(\theta) = \frac{\sqrt{5}}{3}\pi\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos\theta\right) = \frac{\sqrt{5}}{3}\pi\sin(\theta+\alpha) \quad \left(ただし、\tan\alpha = \frac{1}{2}かつ0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

$\alpha < \dfrac{\pi}{4}$ で、$\alpha \leqq \theta+\alpha \leqq \dfrac{3}{4}\pi + \alpha < 2\pi$ より、$V_2(\theta)$ は $\theta+\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大。$V_2(0) = \dfrac{\pi}{3}$ 、$V_2\left(\dfrac{3}{4}\pi\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{6}\pi$ より

$V_2(\theta)$ は $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}\pi$ 、$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}\pi$ をとる。

$\dfrac{\sqrt{5}}{3}\pi > \dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi,\ \dfrac{1}{3}\pi > \dfrac{\sqrt{2}}{6}\pi$ であるから　最大値は $\dfrac{\sqrt{5}}{3}\pi$ 、最小値は $\dfrac{\sqrt{2}}{6}\pi$ ……(答)

（注）

パップス・ギュルダンの定理を用いれば、最大値・最小値は容易に求められる。

平面上にある図形 F の面積を S とし、F と同じ平面上にあり F を通らない軸 l の回りで F を 1 回転させた回転体の体積を V とする。回転させる図形 F の重心 G から回転軸 l までの距離を R としたとき、次式が成り立つ。

$$V = 2\pi RS$$

本問の場合、$S = \dfrac{1}{2}$ で、R の取り得る最大値・最小値はそれぞれ $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 、$\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ であるから、

V の最大値は $\dfrac{\sqrt{5}}{3}\pi$ 、最小値は $\dfrac{\sqrt{2}}{6}\pi$ となる。

ただし、検算での利用に留めるべきである。