1990年東大理 $\boxed{2}$

(1)

$h(x)=px^3+qx^2+rx+s$

(i)より　$h(1)=p+q+r+s=1,\ h(-1)=-p+q-r+s=-1$　$\therefore q+s=0,\ p+r=1$

$s=-q,\ r=1-p$ として　$h(x)=px^3+qx^2+(1-p)x-q$

(ii)より　$h(x)$ が $x=\alpha$ で極大値 1 をとり、$x=\beta$ で極小値 -1 をとり、$-1<\alpha<1,\ -1<\beta<1$ とすると

$h(x)-1=p(x-1)(x-\alpha)^2$ と書けて、

$h(x)-1=px^3+qx^2+(1-p)x-q-1=(x-1)\{px^2+(p+q)x+(q+1)\}$

したがって、$px^2+(p+q)x+(q+1)=0$ が重解を持ち、

$D=(p+q)^2-4p(q+1)=(p-q)^2-4p=0$ ――①

$h(x)+1=p(x+1)(x-\beta)^2$ と書けて、

$h(x)+1=px^3+qx^2+(1-p)x-q+1=(x+1)\{px^2-(p-q)x-(q-1)\}$

したがって、$px^2-(p-q)x-(q-1)=0$ が重解を持ち、

$D=(p-q)^2+4p(q-1)=(p+q)^2-4p=0$ ――②

①、②より　$4p=(p+q)^2=(p-q)^2$　$\therefore pq=0$

$h(x)$ は3次式であるから $p\neq 0$ で、$\therefore q=0$

$4p=p^2$　$p(p-4)=0$　$p\neq 0$ より　$\therefore p=4$　$\therefore h(x)=4x^3-3x$

$h'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$

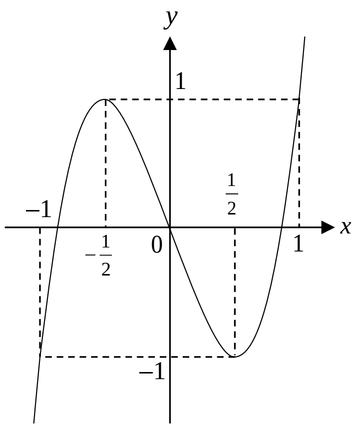
増減は右の通りで、確かに成立。

$\therefore h(x)=4x^3-3x$ ……(答)

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$

(2)

$y=h(x)$ のグラフの概形は右図の通り。



$-1<f(-1)<1,\ -1<f(1)<1$ のとき、$y=f(x)$ および $y=-f(x)$ のグラフは、

$-1<x<1$ において、必ず $y=h(x)$ のグラフと3つの交点を持つ。

$|x|>1$ において $|f(x)|>|h(x)|$ となるには、$|x|>1$ において、$y=h(x)$ のグラフと、

$y=f(x)$ または $y=-f(x)$ のグラフが少なくとも1つの交点を持たなければ

ならないが、2つのグラフは4つ以上の交点を持つことはない。

したがって、$|x|>1$ なる任意の実数 x について、$|f(x)|<|h(x)|$ が成立する。

$|f(1)|=1$ のとき、$x>1$ において $|f(x)|>|h(x)|$ となるには、

$y=h(x)$ のグラフと、$y=f(x)$ または $y=-f(x)$ のグラフが、点 $(1,1)$ において交差するか、点 $(1,1)$ において接するか、いずれかであるが、いずれにしても2つのグラフは4つ以上の交点を持つことになり、矛盾する。

$|f(-1)|=-1$ のときも同様である。

以上により、$|x|>1$ なる任意の実数 x について、$|f(x)|<|h(x)|$ が成立する。(証明終)