1990 年東大理 $\boxed{4}$

(1)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+a^2)^2}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+a^2)^2}\begin{pmatrix} 1-a^2 \\ 2a \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \left(\frac{1}{1+a^2}-1,\ \frac{a}{1+a^2}\right) = \left(-\frac{a^2}{1+a^2},\ \frac{a}{1+a^2}\right),\ \overrightarrow{P_0P_2} = \left(\frac{1-a^2}{(1+a^2)^2}-1,\ \frac{2a}{(1+a^2)^2}\right) = \left(-\frac{3a^2+a^4}{(1+a^2)^2},\ \frac{2a}{(1+a^2)^2}\right)$$

$\triangle P_0P_1P_2$ の面積は

$$S(a) = \frac{1}{2}\left|\frac{-2a^3 + a(3a^2+a^4)}{(1+a^2)^3}\right| = \frac{a^5+a^3}{2(1+a^2)^3} = \frac{a^3}{2(1+a^2)^2}$$

$$S'(a) = \frac{3a^2(1+a^2)^2 - a^3\cdot 2(1+a^2)\cdot 2a}{2(1+a^2)^4} = \frac{3a^2(1+a^2)-4a^4}{2(1+a^2)^3} = \frac{3a^2-a^4}{2(1+a^2)^3} = \frac{a^2(3-a^2)}{2(1+a^2)^3}$$

$S(a)$ の増減は右の通りで、$a=\sqrt{3}$ のとき最大。……(答)

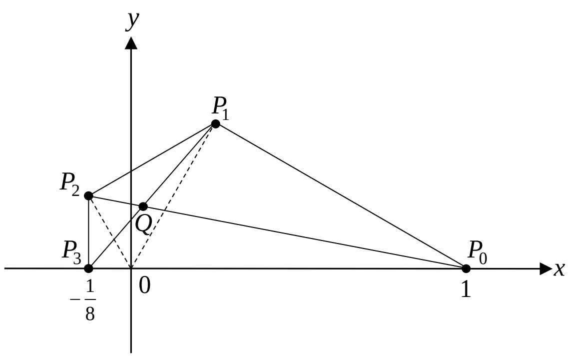
a	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$S'(a)$		＋	0	－
$S(a)$		↗		↘

(2)

$a=\sqrt{3}$ のとき　$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$

これは、大きさ $\frac{1}{2}$ 倍と $\frac{\pi}{3}$ 回転の合成変換を表す。

右図のように、$\triangle P_0P_1P_2$ と $\triangle P_1P_2P_3$ の重なり部分を考える。



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \cos\pi \\ \sin\pi \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから　$\overrightarrow{P_1P_0} = \left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ \overrightarrow{P_1P_2} = \left(-\frac{3}{8}, -\frac{\sqrt{3}}{8}\right),\ \overrightarrow{P_1P_3} = \left(-\frac{3}{8}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

線分 P_0P_2 と P_1P_3 の交点を Q とし、$P_0Q:QP_2 = t:1-t$ とすると

$$\therefore \overrightarrow{P_1Q} = (1-t)\overrightarrow{P_1P_0} + t\overrightarrow{P_1P_2} = \left(\frac{3}{4}-\frac{9}{8}t,\ -\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{8}t\right) \text{ ——①}$$

また、$\overrightarrow{P_1Q}$ は $\overrightarrow{P_1P_3}$ の定数倍であり、$\overrightarrow{P_1Q} = \left(-\frac{3}{8}s,\ -\frac{\sqrt{3}}{4}s\right)$ ——②　とおける。

①、②より　$\begin{cases} 2-3t=-s \\ -2+t=-2s \end{cases}$　$\therefore t=\frac{6}{7},\ s=\frac{4}{7}$

△$P_0P_1P_2$の面積は$\dfrac{3\sqrt{3}}{32}$であるから、△P_0P_1Qの面積は　$\dfrac{3\sqrt{3}}{32}\times\dfrac{6}{7}=\dfrac{9\sqrt{3}}{112}$

△$P_{n+1}P_{n+2}P_{n+3}$と△$P_nP_{n+1}P_{n+2}$の相似比は$\dfrac{1}{2}$であるから、△$P_{n+1}P_{n+2}P_{n+3}$の面積は△$P_nP_{n+1}P_{n+2}$の面積の$\dfrac{1}{4}$。

これより、S_nは

$$S_n=\frac{9\sqrt{3}}{112}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^k+\frac{3\sqrt{3}}{32}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{9\sqrt{3}}{112}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}+\frac{3\sqrt{3}}{32}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{9\sqrt{3}}{112}\cdot\frac{4}{3}\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}+\frac{3\sqrt{3}}{32}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{28}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}+\frac{3\sqrt{3}}{32}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3\sqrt{3}}{28}\quad\cdots\cdots(答)$$

※△$P_0P_1P_2$と△$P_6P_7P_8$に重なり部分がないことは自明とした。