1991年東大文 $\boxed{1}$

$f(x)=x^3-2x^2-3x+4 \qquad f'(x)=3x^2-4x-3=3\left(x-\dfrac{2-\sqrt{13}}{3}\right)\left(x-\dfrac{2+\sqrt{13}}{3}\right)$

$-\dfrac{2}{3}<\dfrac{2-\sqrt{13}}{3},\ \dfrac{2+\sqrt{13}}{3}<2$ であり、

$f(x)$ の増減は右の通り。

x	$-\frac{7}{4}$	$\cdots$	$\frac{2-\sqrt{13}}{3}$	$\cdots$	$\frac{2+\sqrt{13}}{3}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$f(x)=\left(x-\dfrac{2}{3}\right)\left(x^2-\dfrac{4}{3}x-1\right)-\dfrac{26}{9}x+\dfrac{10}{3}$ より

$f\left(\dfrac{2-\sqrt{13}}{3}\right)=-\dfrac{26}{9}\cdot\dfrac{2-\sqrt{13}}{3}+\dfrac{10}{3}=\dfrac{38+26\sqrt{13}}{27} \qquad f\left(\dfrac{2+\sqrt{13}}{3}\right)=-\dfrac{26}{9}\cdot\dfrac{2+\sqrt{13}}{3}+\dfrac{10}{3}=\dfrac{38-26\sqrt{13}}{27}$

$f\left(-\dfrac{7}{4}\right)=-\dfrac{343}{64}-2\cdot\dfrac{49}{16}+3\cdot\dfrac{7}{4}+4=-\dfrac{143}{64} \qquad f(3)=27-18-9+4=4$

ここで、$3.6^2=12.96,\ 3.7^2=13.69$ より、$3.6<\sqrt{13}<3.7$ であるから

$\dfrac{38-26\sqrt{13}}{27}+\dfrac{143}{64}=\dfrac{38\cdot 64-26\cdot 64\sqrt{13}+143\cdot 27}{27\cdot 64}=\dfrac{6293-1664\sqrt{13}}{27\cdot 64}$

$6293-1664\sqrt{13}>6293-1664\cdot 3.7=6293-6156.8>0 \qquad \therefore \dfrac{38-26\sqrt{13}}{27}>-\dfrac{143}{64}$

$\dfrac{38+26\sqrt{13}}{27}-4=\dfrac{38+26\sqrt{13}-108}{27}=\dfrac{26\sqrt{13}-70}{27}>\dfrac{26\cdot 3-70}{27}=\dfrac{78-70}{27}>0 \qquad \therefore \dfrac{38+26\sqrt{13}}{27}>4$

以上により、最大値は $\dfrac{38+26\sqrt{13}}{27}\left(x=\dfrac{2-\sqrt{13}}{3}\right)$、最小値は $-\dfrac{143}{64}\left(x=-\dfrac{7}{4}\right)$ ……(答)