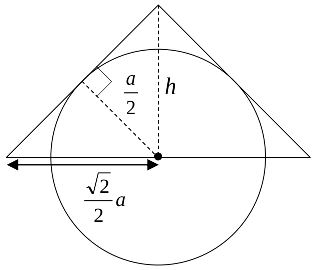
1991 年東大文 $\boxed{4}$

底面は一辺が a の正方形で、球の中心が底面にあり、すべての辺と接することから、球の半径は $\dfrac{a}{2}$ である。

(1)

底面の対角線と中心を通り、底面に垂直な断面を考える。



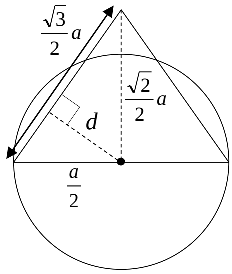
高さを h とすると、相似性より

$$\sqrt{h^2+\frac{a^2}{2}} : \frac{\sqrt{2}}{2}a = h : \frac{a}{2} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}ah = \frac{a}{2}\sqrt{h^2+\frac{a^2}{2}} \qquad \sqrt{2}h = \sqrt{h^2+\frac{a^2}{2}}$$

$$2h^2 = h^2 + \frac{a^2}{2} \qquad h^2 = \frac{a^2}{2} \qquad \therefore h = \frac{\sqrt{2}}{2}a \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(2)

底面の向かい合った二辺の中点と中心を通り、底面に垂直な断面を考える。

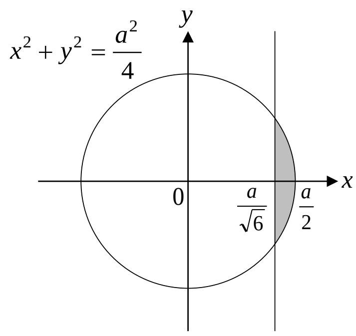


球の中心から側面までの距離を d とすると、相似性より

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a : \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a : d \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}ad = \frac{\sqrt{2}}{4}a^2 \qquad \therefore d = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}a = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

正四角錐の 1 つの側面が、球から切り取る部分の体積は、

右図の網掛部を x 軸中心に回転して得られる立体の体積に等しく、



$$V = \pi\int_{\frac{a}{\sqrt{6}}}^{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^2}{4}-x^2\right)dx = \pi\left[\frac{a^2}{4}x-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{a}{\sqrt{6}}}^{\frac{a}{2}} = \pi\left(\frac{a^3}{8}-\frac{a^3}{24}-\frac{a^3}{4\sqrt{6}}+\frac{a^3}{18\sqrt{6}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{12}-\frac{7\sqrt{6}}{216}\right)\pi a^3$$

求める体積は、半径 $\dfrac{a}{2}$ の半球の体積から、$4V$ を引いたものであるから

$$\therefore \frac{2}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{12}-\frac{7\sqrt{6}}{216}\right)\pi a^3 = \left(\frac{7\sqrt{6}}{54}-\frac{1}{4}\right)\pi a^3 \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$