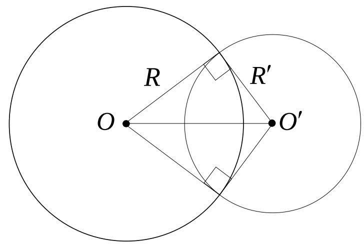
1991年東大理後期 $\boxed{2}$

(1)



Oを中心とし半径Rの円と、O'を中心とし半径R'の円が直交するとき、

$OO'^2 = R^2 + R'^2$ ——①

が成り立つ。

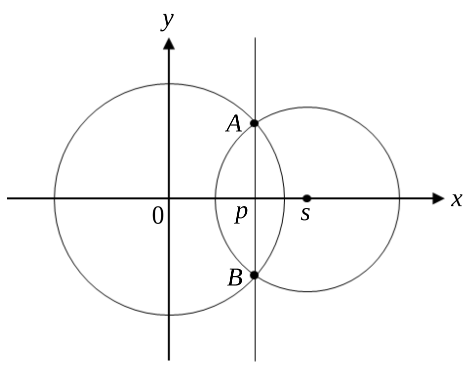
今、C_1, C_2の方程式を以下のように置いても一般性を失わない。

$C_1 : x^2 + y^2 = R^2$ ——②

$C_2 : (x-s)^2 + y^2 = R'^2$ ——③

ただし、$s > 0$であり、C_1, C_2が相違なる2点A, Bで交わることから、$|R - R'| < s < R + R'$とする。

②−③より、2点A, Bを通る直線の方程式は　$2sx - s^2 = R^2 - R'^2$　$\therefore x = \dfrac{R^2 - R'^2 + s^2}{2s}$



C_3の中心を(p, q)、半径をrとすると、①より

$p^2 + q^2 = R^2 + r^2$ ——④

$(p-s)^2 + q^2 = R'^2 + r^2$ ——⑤

④−⑤より　$2sp - s^2 = R^2 - R'^2$　$\therefore p = \dfrac{R^2 - R'^2 + s^2}{2s}$

したがって、C_3の中心は2点A, Bを通る直線上にある。（証明終）

(2)

(1)において、2点A, Bの座標をそれぞれ$(p, t), (p, -t)$と置く。ただし$t > 0$とする。

$t^2 = R^2 - p^2$であり、④より　$q^2 = R^2 + r^2 - p^2 = t^2 + r^2 > t^2$　$\therefore |q| > t$

したがって、C_3の中心は、2点A, Bを通る直線上において、Aより上かBより下に存在する。

今、$q > 0$とする。C_3の中心とAの距離は

$$q - t = \sqrt{t^2 + r^2} - t = \frac{r^2}{\sqrt{t^2 + r^2} + t} = \frac{r}{\sqrt{1 + \dfrac{t^2}{r^2}} + \dfrac{t}{r}} < r$$

C_3の中心とBの距離は　$q + t = \sqrt{t^2 + r^2} + t > r$

したがって、C_3は線分ABと交差し、AはC_3の内部にあり、BはC_3の外部にある。

同様に、$q < 0$とすれば、AはC_3の外部にあり、BはC_3の内部にあることが導かれる。

以上により示された。（証明終）