1992年東大文 $\boxed{3}$

(1)

X_n の中の「0」の個数を s_n、「1」の個数を t_n とすると

「0」が「1」に、「1」が「10」に置き換わることから、以下の漸化式が成り立つ。

$$\begin{cases} s_{n+1} = t_n \\ t_{n+1} = s_n + t_n \end{cases} \quad s_1 = 0, t_1 = 1$$

s_n を消去すると　$t_{n+1} = t_{n-1} + t_n \ (n \geqq 2)$　$\therefore t_{n+2} = t_n + t_{n+1} \ (n \geqq 1)$

$t_1 = 1,\ t_2 = s_1 + t_1 = 1$ であるから　$\therefore t_n = p_n$

したがって、求める桁数 a_n は

$$\therefore a_n = s_n + t_n = t_{n+1} = p_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\} \quad \cdots\cdots(答)$$

(2)

ルールに従えば、X_n の中で「0」が2個以上連続することはなく、「0」の両隣りは必ず「1」である。

また、X_n の右端に現れる数字は、n が奇数のとき「1」、n が偶数のとき「0」である。

したがって、n が奇数のとき、X_n の中のすべての「0」の右隣りに「1」が存在する。n が偶数のとき、右端の「0」以外の「0」の右隣りに「1」が存在する。

(1)より、X_n の中の「0」の個数は $s_n = p_{n-1}$ で与えられ、$n=1$ でも成立する。

したがって、s_n を用いると、求める回数 b_n は

$$\therefore b_n = \begin{cases} s_n & = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right\} & (n\text{が奇数}) \\ s_n - 1 & = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right\} - 1 & (n\text{が偶数}) \end{cases} \quad \cdots\cdots(答)$$