1992年東大理後期 1

(1)

$x \geqq 1$において $f(x) = x - \left(\sqrt{x^2 - 1} + \dfrac{a}{x}\right)$ とする。$x \geqq 1$において $f(x) > 0$ となる条件を考える。

$f(1) = 1 - a > 0$ より　$\therefore a < 1$ ――①

$$f(x) = \frac{x^2 - a - x\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \frac{(x^2 - a)^2 - x^2(x^2 - 1)}{x(x^2 - a + x\sqrt{x^2 - 1})} = \frac{x^4 - 2ax^2 + a^2 - x^4 + x^2}{x(x^2 - a + x\sqrt{x^2 - 1})} = \frac{(1 - 2a)x^2 + a^2}{x(x^2 - a + x\sqrt{x^2 - 1})}$$

①より $x \geqq 1$において $x^2 - a > 0$ であり、$f(x) > 0$ となるには、$(1 - 2a)x^2 + a^2 > 0$ であればよい。

$1 - 2a < 0$ のとき、$x^2 \geqq \dfrac{a^2}{2a - 1}$ であれば $(1 - 2a)x^2 + a^2 \leqq 0$ となる。

したがって、$1 - 2a \geqq 0$ であるから　$\therefore a \leqq \dfrac{1}{2}$　$\therefore a_0 = \dfrac{1}{2}$ ……(答)

(2)

$$V(\theta) = \pi\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\left\{x^2 - \left(\sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2x}\right)^2\right\}dx = \pi\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\left\{x^2 - \left(x^2 - 1 + \frac{1}{4x^2} + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\right)\right\}dx$$

$$= \pi\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)dx - \pi\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}dx$$

ここで　$\displaystyle\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)dx = \left[x + \frac{1}{4x}\right]_1^{\frac{1}{\cos\theta}} = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{4}\cos\theta - \frac{5}{4}$　$\displaystyle\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}dx$ を求める。

(解答 1)

$x = \dfrac{1}{\cos t}$ とおくと　$dx = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}dt$

x	$1 \to \dfrac{1}{\cos\theta}$
t	$0 \to \theta$

$$\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}dx = \int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}dx = \int_0^{\theta}\sqrt{1 - \cos^2 t}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\theta}\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}dt = \int_0^{\theta}\left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)dt$$

$$= \left[\tan t - t\right]_0^{\theta} = \tan\theta - \theta$$

$$\therefore V(\theta) = \pi\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{4}\cos\theta - \frac{5}{4}\right) - \pi(\tan\theta - \theta) = \pi\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{4}\cos\theta + \theta - \tan\theta - \frac{5}{4}\right)$$ ……(答)

(解答 2)

$t = \sqrt{x^2 - 1}$ とおくと　$t^2 = x^2 - 1$　$tdt = xdx$　$\dfrac{dx}{x} = \dfrac{t}{x^2}dt = \dfrac{t}{t^2 + 1}dt$

x	$1 \to \dfrac{1}{\cos\theta}$
t	$0 \to \tan\theta$

$$\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}dx = \int_0^{\tan\theta}\frac{t^2}{t^2 + 1}dt = \int_0^{\tan\theta}\left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right)dt = \tan\theta - \int_0^{\tan\theta}\frac{1}{t^2 + 1}dt$$

さらに、$t=\tan\alpha$ とおくと　$dt=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha$

t	$0\to\tan\theta$
α	$0\to\theta$

$$\int_0^{\tan\theta}\frac{1}{t^2+1}dt=\int_0^{\theta}\frac{1}{\tan^2\alpha+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha=\int_0^{\theta}\cos^2\alpha\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha=\int_0^{\theta}d\alpha=\theta$$

$$\therefore\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx=\tan\theta-\theta$$

$$\therefore V(\theta)=\pi\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{4}\cos\theta-\frac{5}{4}\right)-\pi(\tan\theta-\theta)=\pi\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{4}\cos\theta+\theta-\tan\theta-\frac{5}{4}\right)$$ ……(答)

(3)

$\dfrac{1}{\cos\theta}-\tan\theta=\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$ より

$\theta\to\dfrac{\pi}{2}-0$ のとき、$\sin\theta\to1,\ \cos\theta\to0$ であるから　$\dfrac{1}{\cos\theta}-\tan\theta\to0$

$$\therefore\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}V(\theta)=\pi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5}{4}\right)$$ ……(答)