1992年東大理後期$\boxed{3}$

(1)

$n<m$ のとき　$P_n(x)$ を $P_m(x)$ で割った余りは $P_n(x)$ で、$n \leqq m-1$

$n=m$ のとき　$P_n(x)$ を $P_m(x)$ で割った余りは $0=P_0(x)$

$n>m$ のとき　$(x-1)P_n(x)=x^n-1,\ (x-1)P_m(x)=x^m-1$

n が m の倍数のとき　$n=mk\ (k \geqq 1)$ とおくと

$$x^n-1=(x^m)^k-1=(x^m-1)(x^{m(k-1)}+\cdots+x^m+1)=(x^m-1)P_k(x^m)$$

両辺を $x-1$ で割ると　$\therefore P_n(x)=P_m(x)\cdot P_k(x^m)$ ——①

このとき、$P_n(x)$ を $P_m(x)$ で割った余りは $0=P_0(x)$。

n が m の倍数ではないとき　$n=mk+l\ \ (k \geqq 1, 1 \leqq l \leqq m-1)$ とおくと

$$x^n-1=(x^m)^k\cdot x^l-1=\left\{(x^m)^k-1+1\right\}\cdot x^l-1=\left\{(x^m-1)P_k(x^m)+1\right\}\cdot x^l-1$$

$$=x^l(x^m-1)P_k(x^m)+(x^l-1)$$

両辺を $x-1$ で割ると　$\therefore P_n(x)=x^l\cdot P_m(x)\cdot P_k(x^m)+P_l(x)$

このとき、$P_n(x)$ を $P_m(x)$ で割った余りは $P_l(x)$。

以上により、題意は示された。(証明終)

(2)

$100=25\times 4$ であるから、①より　$P_{100}(x)=P_4(x)\cdot P_{25}(x^4)$

$4=2\times 2$ より　$P_4(x)=P_2(x)\cdot P_2(x^2)$　$\therefore P_{100}(x)=P_2(x)\cdot P_2(x^2)\cdot P_{25}(x^4)$

$P_1(x^2)=1$ より　$P_4(x)=P_4(x)\cdot P_1(x^2)$ と書けるので　$\therefore P_{100}(x)=P_4(x)\cdot P_1(x^2)\cdot P_{25}(x^4)$

$P_1(x^4)=1$ より　$P_{100}(x)=P_{100}(x)\cdot P_1(x^4)$ と書ける。

$100=50\times 2$ より　$P_{100}(x)=P_2(x)\cdot P_{50}(x^2)$　$\therefore P_{100}(x)=P_2(x)\cdot P_{50}(x^2)\cdot P_1(x^4)$

$P_1(x^2)=1, P_1(x^4)=1$ より　$\therefore P_{100}(x)=P_{100}(x)\cdot P_1(x^2)\cdot P_1(x^4)$

以上により、$\therefore (l,m,n)=(2,2,25),(4,1,25),(2,50,1),(100,1,1)$ ……(答)