1992 年東大理 $\boxed{5}$

(1)

$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$ であり、$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}\left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)\dfrac{dx}{dt}$ であるから

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\frac{dx}{dt} = \frac{t}{2}$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)dx = tdt \qquad \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} = \frac{t^2}{2} + C$$

$t = 0$ のとき $x = 1$ であるから　$\therefore C = \dfrac{1}{3} - 1 = -\dfrac{2}{3}$

したがって　$\dfrac{t^2}{2} = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{3}$　$\therefore t^2 = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{3}$ ……(答)

(2)

$\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ に平行なベクトル $\left(1, \dfrac{1}{2}\left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right)\right)$ が、(8, 15) と平行になるとき

$$8\cdot\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) - 15\cdot 1 = 4\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) - 15 = 0 \qquad 4x^4 - 15x^2 - 4 = 0 \qquad (4x^2 + 1)(x^2 - 4) = 0$$

$x > 0$ より　$x^2 = 4$　$\therefore x = 2$　このとき　$t^2 = \dfrac{16}{3} - 1 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{17}{3}$　$\therefore t = \dfrac{\sqrt{51}}{3}$

したがって、$\dfrac{\sqrt{51}}{3}$ 秒後。……(答)