1993年東大理 $\boxed{4}$

$$\{f(x)\}^2=(x^n+px+q)^2=x^{2n}+p^2x^2+q^2+2px^{n+1}+2pqx+2qx^n$$
$$=x^{2n}+2px^{n+1}+2qx^n+p^2x^2+2pqx+q^2$$

奇関数部分について $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}2pqx\,dx=0$

偶関数部分について $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^{2n}+p^2x^2+q^2)dx=\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+p^2\cdot\frac{x^3}{3}+q^2x\right]_0^1=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}p^2+q^2$

$$\therefore I=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}p^2+q^2+\int_{-1}^{1}(px^{n+1}+qx^n)dx$$

n が奇数のとき x^{n+1} は偶関数、x^n は奇関数であるから

$$I=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}p^2+q^2+2p\int_0^1x^{n+1}dx=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}p^2+q^2+2p\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}p^2+\frac{2}{n+2}p+q^2$$
$$=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\left(p^2+\frac{6}{n+2}p\right)+q^2=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\left(p+\frac{3}{n+2}\right)^2-\frac{3}{(n+2)^2}+q^2$$
$$=\frac{1}{3}\left(p+\frac{3}{n+2}\right)^2+q^2+\frac{(n+2)^2-3(2n+1)}{(n+2)^2(2n+1)}=\frac{1}{3}\left(p+\frac{3}{n+2}\right)^2+q^2+\frac{(n-1)^2}{(n+2)^2(2n+1)}$$

I を最小にする (p,q) は、$(p,q)=\left(-\dfrac{3}{n+2},\ 0\right)$ のみであり、I の最小値は $\dfrac{(n-1)^2}{(n+2)^2(2n+1)}$

n が偶数のとき x^{n+1} は奇関数、x^n は偶関数であるから

$$I=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}p^2+q^2+2q\int_0^1x^n dx=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}p^2+q^2+2q\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}p^2+q^2+\frac{2}{n+1}q$$
$$=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}p^2+\left(q+\frac{1}{n+1}\right)^2-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{3}p^2+\left(q+\frac{1}{n+1}\right)^2+\frac{(n+1)^2-(2n+1)}{(n+1)^2(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{3}p^2+\left(q+\frac{1}{n+1}\right)^2+\frac{n^2}{(n+1)^2(2n+1)}$$

I を最小にする (p,q) は、$(p,q)=\left(0,\ -\dfrac{1}{n+1}\right)$ のみであり、I の最小値は $\dfrac{n^2}{(n+1)^2(2n+1)}$

以上により、I を最小にする (p,q) および I の最小値は

$$\therefore\begin{cases} n\text{が奇数のとき}\quad (p,q)=\left(-\dfrac{3}{n+2},\ 0\right),\ I=\dfrac{(n-1)^2}{(n+2)^2(2n+1)} \\ n\text{が偶数のとき}\quad (p,q)=\left(0,\ -\dfrac{1}{n+1}\right),\ I=\dfrac{n^2}{(n+1)^2(2n+1)} \end{cases}\quad\cdots\cdots\text{(答)}$$