1994年東大文 $\boxed{3}$

$$A\vec{u}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1+2a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta+\sin\theta\\ \cos\theta+(1+2a)\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\left|A\vec{u}\right|^2&=(\cos\theta+\sin\theta)^2+\{\cos\theta+(1+2a)\sin\theta\}^2\\&=1+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta+2(1+2a)\sin\theta\cos\theta+(1+4a+4a^2)\sin^2\theta\\&=2+4(1+a)\sin\theta\cos\theta+4a(1+a)\sin^2\theta\\&=2+2(1+a)\sin2\theta+2a(1+a)(1-\cos2\theta)\\&=2(1+a+a^2)+2(1+a)(\sin2\theta-a\cos2\theta)\\&=2(1+a+a^2)+2(1+a)\sqrt{1+a^2}\sin(2\theta-\alpha)\quad(\tan\alpha=a)\end{aligned}$$

$-\alpha\leqq2\theta-\alpha\leqq4\pi-\alpha$ より、$-1\leqq\sin(2\theta-\alpha)\leqq1$ であるから

$$\therefore 2(1+a+a^2)-2(1+a)\sqrt{1+a^2}\leqq\left|A\vec{u}\right|^2\leqq2(1+a+a^2)+2(1+a)\sqrt{1+a^2}$$

ここで、

$$2(1+a+a^2)+2(1+a)\sqrt{1+a^2}\leqq6+4\sqrt{2}=(2+\sqrt{2})^2\quad(\because 0<a\leqq1)$$

$$\begin{aligned}2(1+a+a^2)-2(1+a)\sqrt{1+a^2}&=\frac{2\{(1+a+a^2)^2-(1+a)^2(1+a^2)\}}{(1+a+a^2)+(1+a)\sqrt{1+a^2}}=\frac{2a^2}{(1+a+a^2)+(1+a)\sqrt{1+a^2}}\\&\geqq\frac{2a^2}{3+2\sqrt{2}}=(6-4\sqrt{2})a^2=(2-\sqrt{2})^2a^2\quad(\because 0<a\leqq1)\end{aligned}$$

したがって

$$(2-\sqrt{2})^2a^2\leqq\left|A\vec{u}\right|^2\leqq(2+\sqrt{2})^2\quad\therefore(2-\sqrt{2})a\leqq\left|A\vec{u}\right|\leqq2+\sqrt{2}$$ （証明終）