1994 年東大文 $\boxed{4}$

(1)

$$f_1(x)=-4x^3+3x^2+\int_0^c(-4t^3+3t^2)dt=-4x^3+3x^2+\Big[-t^4+t^3\Big]_0^c=-4x^3+3x^2-c^4+c^3$$

$$f_2(x)=-4x^3+3x^2+\int_0^c(-4t^3+3t^2-c^4+c^3)dt=-4x^3+3x^2+\Big[-t^4+t^3-(c^4-c^3)t\Big]_0^c=-4x^3+3x^2-c^5+c^3$$

$$f_3(x)=-4x^3+3x^2+\int_0^c(-4t^3+3t^2-c^5+c^3)dt=-4x^3+3x^2+\Big[-t^4+t^3-(c^5-c^3)t\Big]_0^c=-4x^3+3x^2-c^6+c^3$$

$f_n(x)=-4x^3+3x^2-c^{n+3}+c^3$ と予想できるので、数学的帰納法で示す。 $n=1,\ 2,\ 3$ で成立。
$n=k$ で成立すると仮定すると

$$\begin{aligned}f_{k+1}(x)&=-4x^3+3x^2+\int_0^c(-4t^3+3t^2-c^{k+3}+c^3)dt\\&=-4x^3+3x^2+\Big[-t^4+t^3-(c^{k+3}-c^3)t\Big]_0^c=-4x^3+3x^2-c^{k+4}+c^3\end{aligned}$$

したがって、 $n=k+1$ でも成立するから　$\therefore f_n(x)=-4x^3+3x^2-c^{n+3}+c^3$ ……(答)

(2)

$$f_n'(x)=-12x^2+6x=6x(1-2x)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f_n'(x)$		＋	0	−	
$f_n(x)$		↗		↘	

$0<x<1$ における $f_n(x)$ の増減は右の通り。
$0<c<1$ より　$f_n(0)=c^3(1-c^n)>0$　$f_n(1)=c^3(1-c^n)-1<0$

$f_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+c^3(1-c^n)>0$ で、 $f_n(x)$ は $\frac{1}{2}\leqq x<1$ において単調減少。

したがって、 $0<x<1$ において、 $f_n(x)=0$ を満たす x がただ一つ存在する。(証明終)