1994 年東大理 $\boxed{4}$

$f_1(x)=f(x)+\int_0^c f(t)dt=f(x)+g(c)$　$g(c)$ は定数であるから

$$f_2(x)=f(x)+\int_0^c f_1(t)dt=f(x)+\int_0^c f(t)dt+cg(c)=f(x)+(1+c)g(c)$$

$$f_3(x)=f(x)+\int_0^c f_2(t)dt=f(x)+\int_0^c f(t)dt+c(1+c)g(c)=f(x)+(1+c+c^2)g(c)$$

$f_n(x)=f(x)+(1+c+\cdots+c^{n-1})g(c)$ と予想できる。$n=1,\ 2,\ 3$ で成立。$n=k$ で成立すると仮定すると

$$f_{k+1}(x)=f(x)+\int_0^c f_k(t)dt=f(x)+\int_0^c f(t)dt+c(1+c+\cdots+c^{k-1})g(c)=f(x)+(1+c+\cdots+c^{k-1}+c^k)g(c)$$

したがって、$n=k+1$ でも成立するから、$c\neq 1$ より

$$\therefore f_n(x)=f(x)+(1+c+\cdots+c^{n-1})g(c)=f(x)+\frac{1-c^n}{1-c}g(c)$$

$$\therefore g_n(x)=\int_0^x f_n(t)dt=\int_0^x f(t)dt+x\cdot\frac{1-c^n}{1-c}g(c)=g(x)+x\cdot\frac{1-c^n}{1-c}g(c)$$

$0<c<1$ より　$\therefore \lim_{n\to\infty} g_n(x)=g(x)+\frac{g(c)}{1-c}x$　$f(x)=g'(x)$ であるから、$xf(x)=g(x)+x\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ に代入して

$$xg'(x)=g(x)+x\left\{g(x)+\frac{g(c)}{1-c}x\right\}\quad xg'(x)-g(x)=xg(x)+\frac{g(c)}{1-c}x^2$$

$0<x<1$ のとき、両辺を x^2 で割ると　$\frac{g'(x)}{x}-\frac{g(x)}{x^2}=\frac{g(x)}{x}+\frac{g(c)}{1-c}$　$\therefore \left\{\frac{g(x)}{x}\right\}'=\frac{g(x)}{x}+\frac{g(c)}{1-c}$

$h(x)=\frac{g(x)}{x},\ a=\frac{g(c)}{1-c}$ とおくと　$h'(x)=h(x)+a$　$\frac{h'(x)}{h(x)+a}=1$　$\log|h(x)+a|=x+b=\log e^{x+b}$

$\therefore h(x)+a=\pm e^{x+b}$　$\pm e^b$ を b で置き換えて、$h(x)=\frac{g(x)}{x}=be^x-a$

$\therefore g(x)=bxe^x-\frac{g(c)}{1-c}x$　$\therefore f(x)=b(1+x)e^x-\frac{g(c)}{1-c}$　$f(0)=1$ より　$b-\frac{g(c)}{1-c}=1$　$\therefore b=1+\frac{g(c)}{1-c}$

$g(c)$ を定める。$g(x)=\left\{1+\frac{g(c)}{1-c}\right\}xe^x-\frac{g(c)}{1-c}x$ より

$g(c)=\left\{1+\frac{g(c)}{1-c}\right\}ce^c-\frac{g(c)}{1-c}c$　$\left(1-\frac{ce^c}{1-c}+\frac{c}{1-c}\right)g(c)=ce^c$　$\therefore (1-ce^c)g(c)=c(1-c)e^c$ ――①

ここで、$p(c)=ce^c$ とおくと、$p'(c)=(1+c)e^c$ で、$0<c<1$ のとき $p'(c)>0$ であるから、単調増加。
$p(0)=0,\ p(1)=e$ より、$0<c<1$ において $p(c)=1$ となる c がただ 1 つ存在する。
ところが、$0<c<1$ より①の右辺は 0 にならないので、$p(c)=1$ のとき $g(c)$ が定まらない。

$p(c) \neq 1$のとき　$g(c) = \dfrac{c(1-c)}{1-ce^c} e^c$　$\therefore \dfrac{g(c)}{1-c} = \dfrac{ce^c}{1-ce^c}$　$\therefore b = 1 + \dfrac{ce^c}{1-ce^c} = \dfrac{1}{1-ce^c}$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{1-ce^c}\left\{(1+x)e^x - ce^c\right\} \quad \therefore g(x) = \frac{1}{1-ce^c}(xe^x - ce^c x)$$

ここで、

$$xf(x) = \frac{1}{1-ce^c}\left\{(x+x^2)e^x - ce^c x\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) + \frac{ce^c}{1-ce^c}x = \frac{1}{1-ce^c}xe^x \quad \therefore g(x) + x\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \frac{1}{1-ce^c}(xe^x - ce^c x) + \frac{1}{1-ce^c}x^2 e^x$$

したがって、$0 < x < 1$を満たす任意のxについて、確かに$xf(x) = g(x) + x\lim_{n\to\infty} g_n(x)$が成立。

以上により

$ce^c = 1$のとき　題意を満たす$f(x)$を定められない。
$ce^c \neq 1$のとき　$f(x) = \dfrac{1}{1-ce^c}\left\{(1+x)e^x - ce^c\right\}$　……(答)

（注）

以下のように、$f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$とする解答も見受けられるが、誤りと考えられる。

上記解答の途中経過　$xg'(x) = g(x) + x\left\{g(x) + \dfrac{g(c)}{1-c}x\right\}$　において、$x = c$とすると

$$cg'(c) = \left(1 + c + \frac{c^2}{1-c}\right)g(c) = \frac{1}{1-c}g(c) \quad \frac{g'(c)}{g(c)} = \frac{1}{c(1-c)} = \frac{1}{c} + \frac{1}{1-c} \quad \text{——①}$$

ここで、①のcをxで置き換えると

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \quad \log|g(x)| = \log|x| - \log|1-x| + C = \log\left|\frac{e^C x}{1-x}\right| \quad \therefore g(x) = \pm\frac{e^C x}{1-x}$$

$\pm e^C$をCで置き換えて　$g(x) = \dfrac{Cx}{1-x} = C\left(\dfrac{1}{1-x} - 1\right)$　$\therefore f(x) = g'(x) = \dfrac{C}{(1-x)^2}$

$f(0) = 1$より$C = 1$であるから　$\therefore f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

ところが、$0 < x < 1$において$xf(x) = g(x) + x\lim_{n\to\infty} g_n(x)$に代入すると

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x}{1-x} + x\left\{\frac{x}{1-x} + \frac{c}{(1-c)^2}x\right\} \quad \frac{c}{(1-c)^2}x^2 = \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x} = \frac{x^3}{(1-x)^2} \quad \therefore \frac{c}{(1-c)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

cは定数であるから、任意の$0 < x < 1$について成立しない。①のcをxで置き換えたのが誤りである。