1995 年東大文 2

(1)

$\overrightarrow{P_0P_1}=\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$　$\overrightarrow{P_1P_2}=(0,\ b)$　$\overrightarrow{P_2P_3}=\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$　$\overrightarrow{P_3P_4}=(-b,\ 0)$

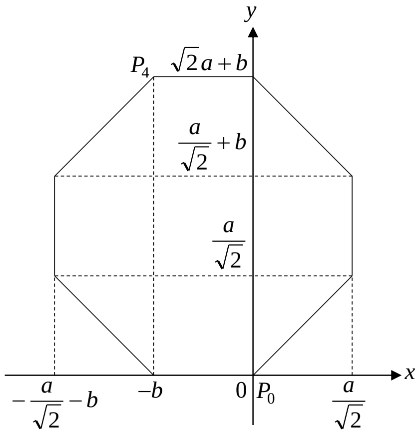
$\overrightarrow{P_4P_5}=\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},\ -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$　$\overrightarrow{P_5P_6}=(0,\ -b)$　$\overrightarrow{P_6P_7}=\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\ -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$　$\overrightarrow{P_7P_8}=(b,\ 0)$

これより、$\overrightarrow{P_0P_8}=\sum_{i=0}^{7}\overrightarrow{P_iP_{i+1}}=(0,\ 0)$ であるから　$\therefore P_8=P_0$　（証明終）

(2)

$P_0,\ P_1,\ \cdots,\ P_8$ を順に結んで得られる 8 角形は、右図の通り。面積は

$\therefore S=4\times\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}+4\times\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot b+b^2=a^2+2\sqrt{2}ab+b^2$ ……(答)



(3)

$S=7$ より　$a^2+2\sqrt{2}ab+b^2=7$ ——①

$P_0P_4=\sqrt{10}$ より　$(\sqrt{2}a+b)^2+b^2=2a^2+2\sqrt{2}ab+b^2=10$ ——②

②−①より　$a^2+b^2=3$ ——③　①に代入して　$2\sqrt{2}ab=7-3=4$　$\therefore ab=\sqrt{2}$

③より　$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a+b)^2-2\sqrt{2}=3$　$(a+b)^2=3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$

$a>0,\ b>0$ であるから　$\therefore a+b=1+\sqrt{2}$

$a,\ b$ は、$t^2-(1+\sqrt{2})t+\sqrt{2}=0$ の 2 解である。$t^2-(1+\sqrt{2})t+\sqrt{2}=(t-1)(t-\sqrt{2})=0$ より

$\therefore (a,\ b)=(1,\ \sqrt{2}),\ (\sqrt{2},\ 1)$ ……(答)