

1995 年東大文 4

水が流れ出したとき、この容器に入っている水の体積は、  
右図の網掛部を  $y$  軸中心に回転した立体の体積に等しく、

$$\pi \int_{-1}^{-\sin \theta} (1 - y^2) dy = \pi \left[ y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^{-\sin \theta} = \pi \left( -\sin \theta + \frac{1}{3} \sin^3 \theta + \frac{2}{3} \right)$$

これが  $\frac{\pi}{18}(3 + \cos^2 \theta)$  に等しいから

$$-\sin \theta + \frac{1}{3} \sin^3 \theta + \frac{2}{3} = \frac{1}{18}(3 + \cos^2 \theta) \quad -18\sin \theta + 6\sin^3 \theta + 12 = 3 + \cos^2 \theta = 4 - \sin^2 \theta$$

$$6\sin^3 \theta + \sin^2 \theta - 18\sin \theta + 8 = 0 \quad (2\sin \theta - 1)(3\sin^2 \theta + 2\sin \theta - 8) = 0$$
$$(2\sin \theta - 1)(3\sin \theta - 4)(\sin \theta + 2) = 0$$

$$0 < \sin \theta < 1 \text{ より } \sin \theta = \frac{1}{2} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{6} \quad \dots\dots (\text{答})$$

