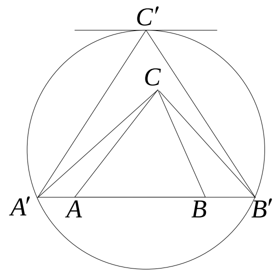
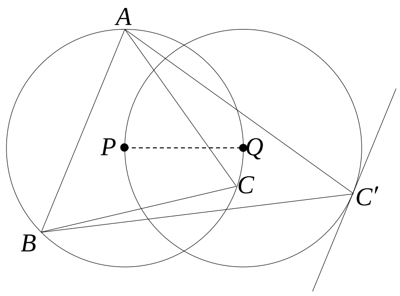
1995年東大理後期 $\boxed{2}$

(1)



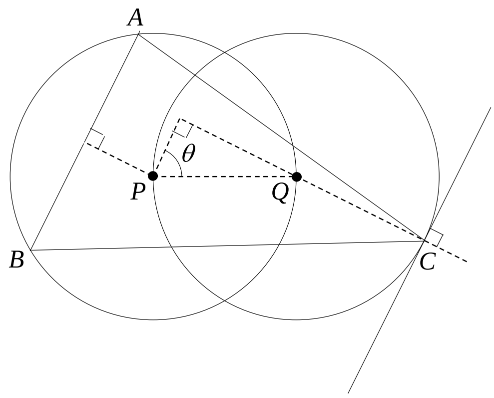
半径1の円の内部に存在する、三角形 ABC を考える。
いずれの頂点も円周上になく、また円の中心が三角形 ABC に含まれるとする。
辺 AB の両端を延長し、円周にぶつかった点をそれぞれ $A',\ B'$ とする。
このとき、三角形 $A'B'C$ の面積は、三角形 ABC の面積より明らかに大きい。
次に、$A'B'$ から見て円の中心と反対側に、$A'B'$ と平行な円の接線を引く。
接点を C' とすると、三角形 $A'B'C'$ の面積は、三角形 $A'B'C$ の面積より明らかに大きい。
以上により、円の内部に存在する三角形の面積が最大になるのは、3つの頂点がいずれも円周上にあるときであることがわかる。



次に、(条件)で示された各頂点 A, B, C の存在範囲は右図のようになる。
今、各頂点 A, B, C は円周 E 上にあるとし、A, B は円周 F の外部にあり、
C は円周 F の内部にあるように、三角形 ABC を P を中心に回転させる。
このとき、辺 AB と平行に円周 F の接線を引き、接点を C' とする。
三角形 ABC' の面積は、三角形 ABC の面積より明らかに大きい。

以上により、題意は示された。(証明終)

(2)

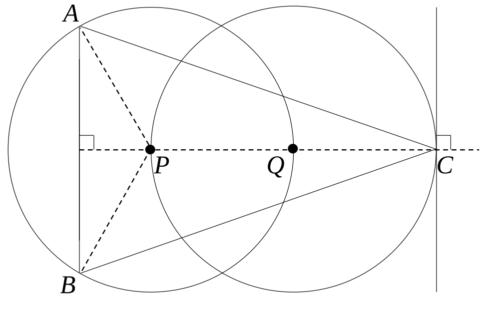


AB と PQ がなす角度を θ とする。
AB と平行に円周 F の接線を引き、接点を C とする。
右図より、辺 AB と C の距離 h は

$$h = p + \sin\theta + 1$$

で与えられる。AB の長さ、p は一定であり、
三角形 ABC の面積が最大になるのは距離 h が最大のときで、
このとき $\theta = \dfrac{\pi}{2}$、すなわち AB と PQ は直交する。(証明終)

(3)



AB と PQ が直交するとき、$AB = 2\sqrt{1-p^2},\ h = 2+p$ であるから

三角形 ABC の面積の最大値 S は　$S = (2+p)\sqrt{1-p^2}$

$f(p) = S^2 = (2+p)^2(1-p^2)$ として、$0 < p < 1$ における増減を調べる。

$$f'(p) = 2(2+p)(1-p^2) - 2p(2+p)^2 = 2(2+p)\left\{(1-p^2) - p(2+p)\right\}$$
$$= 2(2+p)(1-2p-2p^2) = -4(2+p)\left(p + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(p - \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

増減表より、$f(p)$ は $p=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ において最大となる。

p	0	$\cdots$	$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)=\left(2+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(1-\frac{4-2\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

求める最大値は

$$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt[4]{3}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$