1996年東大文 $\boxed{1}$

$X=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ より　$X^2=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2-y^2 & -2xy \\ 2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix}$

$X^2-2X+aE=\begin{pmatrix} x^2-y^2 & -2xy \\ 2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2-y^2-2x+a & -2xy+2y \\ 2xy-2y & x^2-y^2-2x+a \end{pmatrix}=O$

したがって　$x^2-y^2-2x+a=0$ ——①　$y(x-1)=0$ ——②

②より、$x=1$ または $y=0$ である。

$x=1$ のとき　①より　$-y^2-1+a=0$　$y^2=a-1 \geqq 0$ ——③

$a<1$ のとき　③を満たす実数 y は存在しない。

$a=1$ のとき　$y=0$

$a>1$ のとき　$y=\pm\sqrt{a-1}$

$y=0$ のとき　①より　$x^2-2x+a=0$ ——④

④が実数解を持つには　$D/4=1-a \geqq 0$　$\therefore a \leqq 1$

$a>1$ のとき　④を満たす実数 x は存在しない。

$a=1$ のとき　$(x-1)^2=0$　$x=1$

$a<1$ のとき　$x=1\pm\sqrt{1-a}$

以上により　$\therefore \begin{cases} a<1 \text{のとき} & x=1\pm\sqrt{1-a},\ y=0 \\ a=1 \text{のとき} & x=1,\ y=0 \\ a>1 \text{のとき} & x=1,\ y=\pm\sqrt{a-1} \end{cases}$ ……(答)