

1996 年東大文 ③

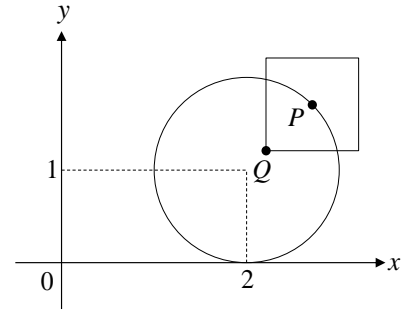
$f(P)$ を与える点を Q とする。

i) $S(P)$ が x 軸と交わらないとき、すなわち $b > \frac{1}{2}$ のとき

$f(P)$ を与える点 Q は、 $\left(a - \frac{1}{2}, b - \frac{1}{2}\right)$ である。

このとき、 P は円 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ 上を動くので、

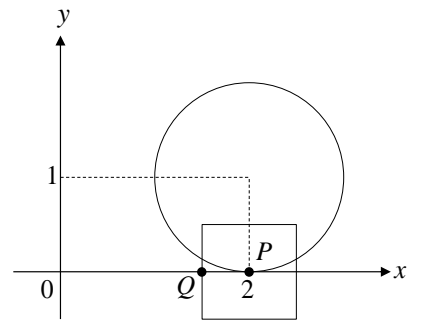
Q は円 $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$ 上を動く。



ii) $S(P)$ が x 軸と交わる時、すなわち $b \leq \frac{1}{2}$ のとき

$f(P)$ を与える点 Q は、 $\left(a - \frac{1}{2}, 0\right)$ である。

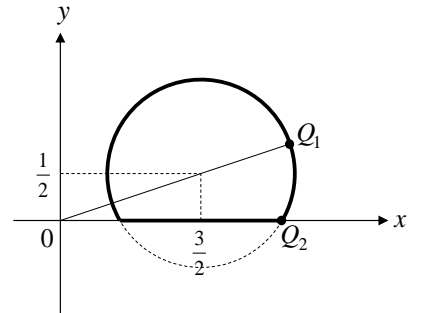
このとき、 Q は x 軸上を動く。



P を動かしたときの Q の軌跡は、右図の太線部のようになる。

i) の場合、 $f(P)$ を最大にする点 Q_1 は、原点と $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を結ぶ線分の

延長と円との交点であり、このとき $f(P) = 1 + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$



ii) の場合、 $f(P)$ を最大にする点 Q_2 は、円と x 軸の交点のうち、

原点から遠い方であり、このとき $f(P) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$1 + \frac{\sqrt{10}}{2} > 1 + \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} + \frac{2}{2} > \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ より、 $f(P)$ の最大値は $\therefore 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$ ……(答)