1996 年東大理 $\boxed{3}$

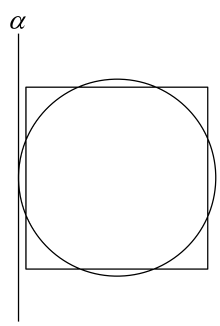
(1)

$r>\dfrac{\sqrt{3}}{2}l$ のとき、立方体全体が球面 S の内部に含まれるから、以下 $r\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}l$ として考える。

S 上の点 P における、接平面 α を考える。
P から見える範囲とは、空間内で α を境界に S を含まない側である。α 上の点も含む。

$r<\dfrac{l}{2}$ のとき、S 上の任意の点における接平面は、立方体を 2 分割する。

2 分割された部分のうち、S を含まない側に、必ず 1 点以上の立方体の頂点が含まれる。
すなわち、少なくとも 1 頂点が見える。



$r=\dfrac{l}{2}$ のとき、S 上の 6 点が、立方体の各面と接する。

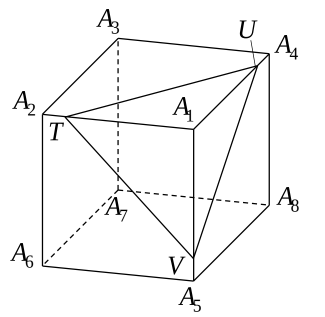
これら 6 点における接平面は、立方体の面を含むから、4 頂点が見える。
これら 6 点以外の点からも、少なくとも 1 つの頂点が見える。

$r>\dfrac{l}{2}$ のとき、立方体からはみ出す S 上の点が存在する。

立方体の面と平行な S の接平面を考えると、接点から見える頂点は 0 である。

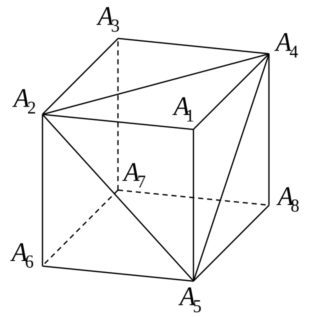
逆に、$r\leqq\dfrac{l}{2}$ のとき、S を含まない側に 1 頂点もない 2 分割はできないから　$\therefore r\leqq\dfrac{l}{2}$　……(答)

(2)



S 上の点 P における接平面 α が、右図のように立方体を 2 分割するとき、
P からは 1 頂点 A_1 のみが見える。
α と 3 辺 $A_1A_2,\ A_1A_4,\ A_1A_5$ との交点 $T,\ U,\ V$ が、それぞれ $A_2,\ A_4,\ A_5$ に近づいたときを考える。

3 点 $A_2,\ A_4,\ A_5$ を通る平面と、S が接するとき、
S の半径は、正四面体 $A_2A_4A_5A_7$ に内接する球の半径に等しい。



正四面体 $A_2A_4A_5A_7$ の体積は　$l^3-4\times\dfrac{1}{3}\cdot l\cdot\dfrac{1}{2}l^2=\dfrac{1}{3}l^3$

正四面体 $A_2A_4A_5A_7$ の 1 つの面の面積は　$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{2}l)^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}l^2$ の体積は

S の半径は　$4\times\dfrac{1}{3}\cdot r\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}l^2=\dfrac{1}{3}l^3$　　$\therefore r=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}l=\dfrac{\sqrt{3}}{6}l$

$r>\dfrac{\sqrt{3}}{6}l$ のとき、正四面体 $A_2A_4A_5A_7$ からはみ出す S 上の点が存在する。

例えば、1 つの面 $A_2A_4A_5$ に平行な S の接平面を考えると、接点から見える頂点は A_1 のみである。

逆に、$r\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{6}l$ のとき、S を含まない側に 1 頂点しかない 2 分割はできないから　$\therefore r\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{6}l$　……(答)