1996 年東大理 $\boxed{6}$

(1)

楕円 C 上の点 P は $(\sqrt{\alpha}\cos\theta,\ \sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}\sin\theta)$ と表せる。

任意の θ について、原点から P までの距離が 1 以下であることが条件であるから

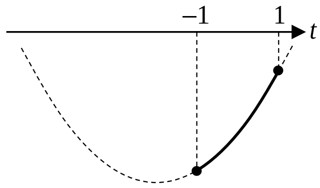
$$OP^2=\alpha\cos^2\theta+\beta(1+2\sin\theta+\sin^2\theta)=(\beta-\alpha)\sin^2\theta+2\beta\sin\theta+\alpha+\beta\leqq 1$$

$f(t)=(\beta-\alpha)t^2+2\beta t+\alpha+\beta-1$ とおき、$-1\leqq t\leqq 1$ において $f(t)\leqq 0$ となる条件を考える。

$\beta-\alpha>0$　$0<\alpha<\beta$ のとき　$f(t)$ は下に凸。

$$f(1)=\beta-\alpha+2\beta+\alpha+\beta-1=4\beta-1 \qquad f(-1)=\beta-\alpha-2\beta+\alpha+\beta-1=2\beta-1<f(1)$$

であるから、$f(1)\leqq 0$ であればよい。

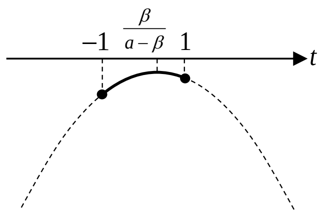


$$4\beta-1\leqq 0 \qquad \therefore 0<\beta\leqq\frac{1}{4} \text{ ——①}$$

$\beta-\alpha=0$　$\beta=\alpha$ のとき　$f(t)=2\alpha t+2\alpha-1$ となる。

$$f(t)\leqq f(1)=2\alpha+2\alpha-1=4\alpha-1\leqq 0 \qquad \therefore 0<\alpha\leqq\frac{1}{4} \text{ ——②}$$

$\beta-\alpha<0$　$0<\beta<\alpha$ のとき　$f(t)$ は上に凸。

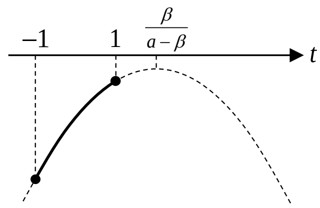


$$f(t)=-(a-\beta)t^2+2\beta t+\alpha+\beta-1=-(\alpha-\beta)\left(t-\frac{\beta}{\alpha-\beta}\right)^2+\frac{\beta^2}{\alpha-\beta}+\alpha+\beta-1$$

$0<\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}<1$　$\beta<\alpha-\beta$　$0<\beta<\dfrac{1}{2}\alpha$ のとき

$$f\left(\frac{\beta}{\alpha-\beta}\right)=\frac{\beta^2}{\alpha-\beta}+\alpha+\beta-1\leqq 0 \qquad \beta^2+\alpha^2-\beta^2-(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha+\beta\leqq 0$$

$$\beta\leqq\alpha-\alpha^2 \qquad \therefore 0<\beta\leqq-\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \text{ ——③}$$



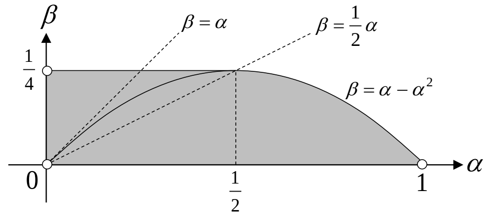
$1\leqq\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}$　$\dfrac{1}{2}\alpha\leqq\beta<\alpha$ のとき　$f(1)\leqq 0$ より　$\therefore 0<\beta\leqq\dfrac{1}{4}$ ——④

以上①～④をまとめると

$0<\beta<\dfrac{1}{2}\alpha$ のとき　$0<\beta\leqq-\left(\alpha-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{1}{2}\alpha\leqq\beta$ のとき　$0<\beta\leqq\dfrac{1}{4}$

図示すると右図の通り。境界線は軸上を除き含む。



(2)

楕円 C の面積は $\pi\sqrt{\alpha\beta}$ で与えられるので、$\alpha\beta$ が最大であればよい。

曲線 $\alpha\beta=k$ が、$\beta=\alpha-\alpha^2$ に接する条件を考える。$k=\alpha^2-\alpha^3$ であり、$g(\alpha)=\alpha^2-\alpha^3$ とおく。

$g(\alpha)=\alpha^2(1-\alpha)>0$ より、$0<\alpha<1$ の範囲で $g(\alpha)$ の増減を考える。

$$g(\alpha)=2\alpha-3\alpha^2=-3\alpha\left(\alpha-\frac{2}{3}\right)$$

$g(\alpha)$ の増減は右の通りで、

$\alpha=\dfrac{2}{3}$ において極大値 $\dfrac{4}{9}-\dfrac{8}{27}=\dfrac{4}{27}$ をとる。

α	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$g'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$g(\alpha)$		↗		↘	

すなわち、$k=\alpha^2-\alpha^3$ が重解を持つのは $k=\dfrac{4}{27}$ のときで、

接点の α 座標 $\alpha=\dfrac{2}{3}$ は $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ の範囲にある。

求める楕円 C の面積は　$\pi\dfrac{2}{3\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi$　……(答)