1997 年東大文 $\boxed{4}$

$\dfrac{2(t^2+t+1)}{3(t+1)}=\dfrac{2}{3}\left(t+\dfrac{1}{t+1}\right)$ より、直線 AB の傾きは　$-\dfrac{3(t+1)}{2}\cdot(2-2t)=3(t^2-1)$

直線 AB の方程式は　$y=3(t^2-1)\left(x-\dfrac{2}{3}t\right)-2t=3(t^2-1)x-2(t^2-1)t-2t=3(t^2-1)x-2t^3$

これを、t に関する 3 次方程式と見ると　$2t^3-3xt^2+3x+y=0$

$f(t)=2t^3-3xt^2+3x+y=0$ が、$0\leqq t\leqq 1$ の範囲で実数解を持つ。$f'(t)=6t^2-6xt=6t(t-x)$ より

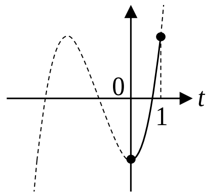
$x\leqq 0$ のとき

　$0\leqq t\leqq 1$ において $f'(t)\geqq 0$ であり、$f(t)$ は単調増加。

　$f(0)=3x+y\leqq 0$ かつ $f(1)=2+y\geqq 0$ であればよいから

　$\therefore -2\leqq y\leqq -3x$

t	0	$\cdots$	1
$f'(t)$	0	＋	
$f(t)$		↗	



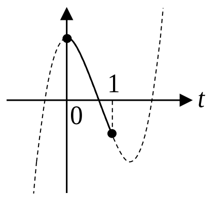
$1\leqq x$ のとき

　$0\leqq t\leqq 1$ において $f'(t)\leqq 0$ であり、$f(t)$ 単調減少。

　$f(0)=3x+y\geqq 0$ かつ $f(1)=2+y\leqq 0$ であればよいから

　$\therefore -3x\leqq y\leqq -2$

t	0	$\cdots$	1
$f'(t)$	0	－	
$f(t)$		↘	



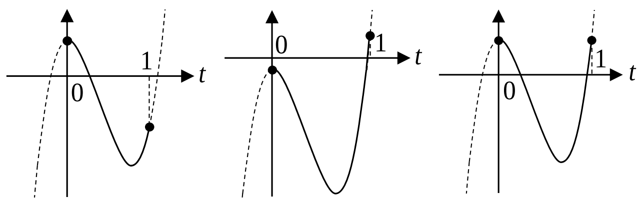
$0<x<1$ のとき

　$f(t)$ は $t=x$ において極小値をとる。

　$f(x)>0$ のとき、$0\leqq t\leqq 1$ において $f(t)>0$ となり、不適。

　$f(x)\leqq 0$ のとき、$f(0)\geqq 0$ または $f(1)\geqq 0$ であればよい。

t	0	$\cdots$	x	$\cdots$	1
$f'(t)$		－	0	＋	
$f(t)$		↘		↗	

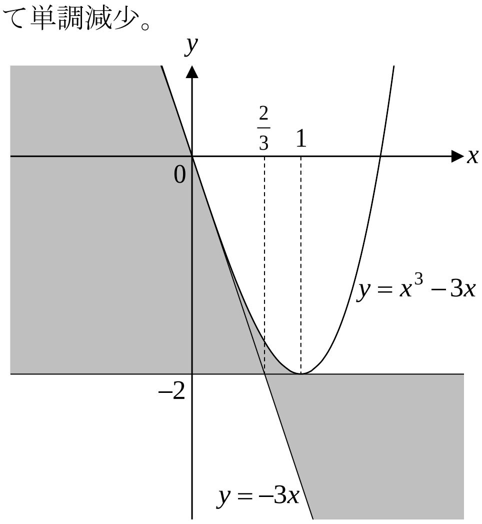


　$f(x)=-x^3+3x+y$ より

　　$\therefore y\leqq x^3-3x$　かつ（$y\geqq -3x$ または $y\geqq -2$）

　$g(x)=x^3-3x$ とすると、$g'(x)=3(x^2-1)$ であり、$0<x<1$ において単調減少。

以上により、直線 AB の通り得る範囲は右図の通り。
境界線を含む。



（注）

$y=3(t^2-1)x-2t^3$ は、$y=x^3-3x$ 上の点 $(t,\ t^3-3t)$ における

接線である。