1997年東大理$\boxed{1}$文$\boxed{2}$共通

(1)

$0 < a \leqq 1,\ 0 < b \leqq 1$ ——① は明らかである。

もう1つの頂点Cを求める。$\overrightarrow{BA} = (a,\ -b)$ であり、$\overrightarrow{BC}$ は $\overrightarrow{BA}$ を $\dfrac{\pi}{3}$ 回転したものであるから

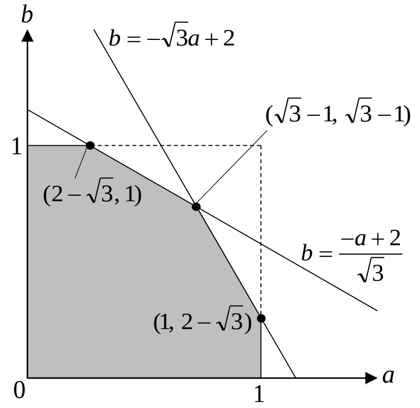
$$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+\sqrt{3}b \\ \sqrt{3}a-b \end{pmatrix} \quad \therefore \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+\sqrt{3}b \\ \sqrt{3}a-b \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+\sqrt{3}b \\ \sqrt{3}a+b \end{pmatrix}$$

$0 \leqq \dfrac{a+\sqrt{3}b}{2} \leqq 1$ より

$-a < 0 < \sqrt{3}b \leqq -a+2 \quad \therefore 0 < b \leqq \dfrac{-a+2}{\sqrt{3}}$ ——②

$0 \leqq \dfrac{\sqrt{3}a+b}{2} \leqq 1$ より

$-\sqrt{3}a < 0 < b \leqq -\sqrt{3}a+2 \quad \therefore 0 < b \leqq -\sqrt{3}a+2$ ——③



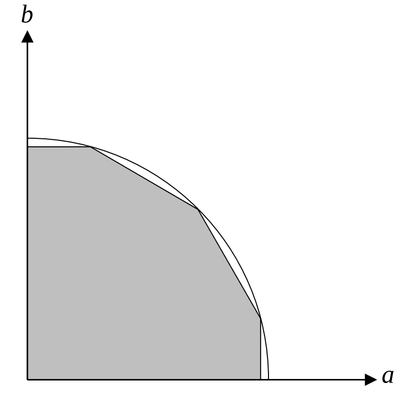
以上①〜③をab平面に図示すると、右図の通り。
境界線は軸上を除き含む。

(2)

正三角形ABCの一辺の長さは$\sqrt{a^2+b^2}$ であるから $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)$

Sが最大になるのは、a^2+b^2が最大になるときである。

$a^2+b^2 = r^2$ とすると、
$(a,\ b) = (2-\sqrt{3},\ 1),\ (\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}-1), (1,\ 2-\sqrt{3})$
を通るとき最大であり、a^2+b^2 の最大値は
$(2-\sqrt{3})^2+1 = 2(\sqrt{3}-1)^2 = 8-4\sqrt{3}$



以上により、Sを最大にする$(a,\ b)$は
$\therefore (a,\ b) = (2-\sqrt{3},\ 1),\ (\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}-1), (1,\ 2-\sqrt{3})$ ……(答)

Sの最大値は $\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{4}(8-4\sqrt{3}) = -3+2\sqrt{3}$ ……(答)