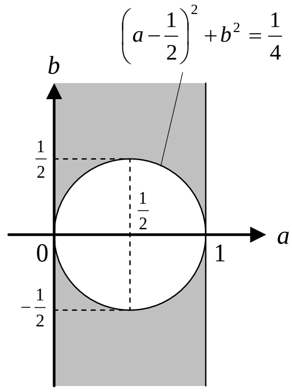
1998年東大文 $\boxed{2}$

(1)

$a \leqq 0$ならば$\angle POQ$が直角または鈍角になり、

$1 \leqq a$ならば$\angle OPQ$が直角または鈍角になるのは明らかで、　$\therefore 0 < a < 1$



$\angle OQP$が鋭角になる条件を考えると、

$\overrightarrow{QO}=(-a,-b)$　$\overrightarrow{QP}=(1-a,-b)$　$\therefore \overrightarrow{QO}\cdot\overrightarrow{QP}=-a(1-a)+b^2=a^2-a+b^2>0$

求める条件は　$\therefore 0<a<1$ かつ $\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+b^2>\dfrac{1}{4}$ ……(答)

点Qの存在範囲を図示すると、右図の網掛部の通り。境界線を含まない。

(2)

$n=0$のとき

$(m+na)^2-(m+na)+n^2b^2=m^2-m \geqq 0$　$(\because m$は整数$)$

$n \neq 0$のとき　(1)より$b^2>a-a^2$であるから

$$(m+na)^2-(m+na)+n^2b^2>(m+na)^2-(m+na)+n^2(a-a^2)$$
$$=m^2+2mna+n^2a^2-m-na+n^2a-n^2a^2$$
$$=m^2-m+an(2m+n-1)$$

ここで、右辺はaについての1次式であり、(1)より$0<a<1$であるから

$n(2m+n-1)>0$のとき　$m^2-m+an(2m+n-1)>m^2-m \geqq 0$　$(\because m$は整数$)$

$n(2m+n-1)=0$のとき　$m^2-m+an(2m+n-1)=m^2-m \geqq 0$　$(\because m$は整数$)$

$n(2m+n-1)<0$のとき

$m^2-m+an(2m+n-1)>m^2-m+n(2m+n-1)=(m+n)^2-(m+n) \geqq 0$　$(\because m+n$は整数$)$

したがって、いずれにしても、$m^2-m+an(2m+n-1) \geqq 0$が成り立つので

$\therefore (m+na)^2-(m+na)+n^2b^2 \geqq 0$　（証明終）

なお、$x^2-x<0$を解くと$0<x<1$であるが、xが整数ならば満たさない。

したがって、xが整数のとき、$x^2-x \geqq 0$は明らかである。