1998 年東大文 $\boxed{3}$

(1)

$0° \leqq x \leqq 22.5°$ のとき

$0° \leqq 4x \leqq 90°$　　$\sin y = |\sin 4x| = \sin 4x$　　$\cos y = |\cos 4x| = \cos 4x$　　$\therefore y = 4x$

$22.5° \leqq x \leqq 45°$ のとき

$90° \leqq 4x \leqq 180°$　　$\sin y = |\sin 4x| = \sin 4x$　　$\cos y = |\cos 4x| = -\cos 4x$　　$\therefore y = -4x + 180°$

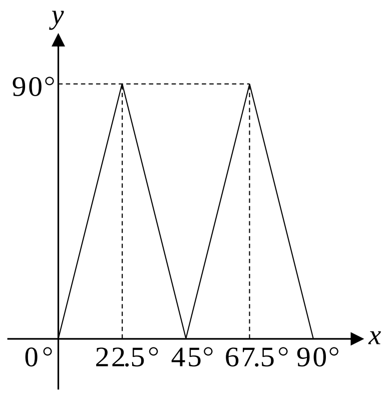
$45° \leqq x \leqq 67.5°$ のとき

$180° \leqq 4x \leqq 270°$　　$\sin y = |\sin 4x| = -\sin 4x$　　$\cos y = |\cos 4x| = -\cos 4x$　　$\therefore y = 4x - 180°$

$67.5° \leqq x \leqq 90°$ のとき

$270° \leqq 4x \leqq 360°$　　$\sin y = |\sin 4x| = -\sin 4x$　　$\cos y = |\cos 4x| = \cos 4x$　　$\therefore y = -4x + 360°$

以上により $\begin{cases} 0° \leqq x \leqq 22.5° \text{のとき} & y = 4x \\ 22.5° \leqq x \leqq 45° \text{のとき} & y = -4x + 180° \\ 45° \leqq x \leqq 67.5° \text{のとき} & y = 4x - 180° \\ 67.5° \leqq x \leqq 90° \text{のとき} & y = -4x + 360° \end{cases}$ ……(答)



グラフは右図。

(2)

$\theta_k = 0°$ となるとき、$\theta_{k-m}\ (1 \leqq m \leqq k-1)$ の個数を、p_m と表す。求める $\theta_1 = \alpha$ の個数は p_{k-1} である。

グラフより

$\theta_{k-m} = 0°$ のとき、対応する θ_{k-m-1} は、$0°, 45°, 90°$ の 3 個。

$0° < \theta_{k-m} < 90°$ のとき、対応する θ_{k-m-1} は、4 個。

$\theta_{k-m} = 90°$ のとき、対応する θ_{k-m-1} は、$22.5°, 67.5°$ の 2 個。

θ_{k-m} には、$0°$ と $90°$ が必ず含まれるので、$0° < \theta_{k-m} < 90°$ である θ_{k-m} の個数は $p_m - 2$ 個。

p_m について次の漸化式が成り立つ。　$\therefore p_{m+1} = 4(p_m - 2) + 3 + 2 = 4p_m - 3$　　$p_1 = 3$ より

$p_{m+1} - 1 = 4(p_m - 1)$　　$p_m - 1 = 4^{m-1}(p_1 - 1) = 2^{2m-1}$　　$\therefore p_m = 2^{2m-1} + 1$

求める個数は　$\therefore p_{k-1} = 2^{2k-3} + 1$ ……(答)