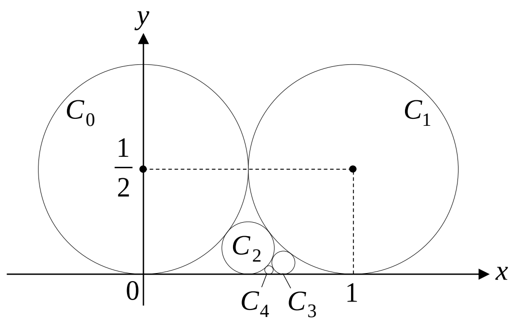
1998年東大理$\boxed{3}$

(1)

C_n の中心は $(x_n,\ r_n)$ で与えられる。C_{n-1} と C_n、C_{n-1} と C_{n+1}、C_n と C_{n+1} がそれぞれ接することから

$$(r_{n-1}+r_n)^2=(r_{n-1}-r_n)^2+(x_{n-1}-x_n)^2 \quad \therefore 4r_{n-1}r_n=(x_{n-1}-x_n)^2$$
$$(r_{n-1}+r_{n+1})^2=(r_{n-1}-r_{n+1})^2+(x_{n-1}-x_{n+1})^2 \quad \therefore 4r_{n-1}r_{n+1}=(x_{n-1}-x_{n+1})^2$$
$$(r_n+r_{n+1})^2=(r_n-r_{n+1})^2+(x_n-x_{n+1})^2 \quad \therefore 4r_nr_{n+1}=(x_n-x_{n+1})^2$$

n が奇数のとき、$x_{n-1}<x_{n+1}<x_n$ であるから



$$2\sqrt{r_{n-1}r_n}=x_n-x_{n-1} \quad \text{——①}$$

$$2\sqrt{r_{n-1}r_{n+1}}=x_{n+1}-x_{n-1} \quad \text{——②}$$

$$2\sqrt{r_nr_{n+1}}=x_n-x_{n+1} \quad \text{——③}$$

②＋③より　$2\sqrt{r_{n-1}r_{n+1}}+2\sqrt{r_nr_{n+1}}=x_n-x_{n-1}=2\sqrt{r_{n-1}r_n}$　　$\sqrt{r_{n-1}r_{n+1}}+\sqrt{r_nr_{n+1}}=\sqrt{r_{n-1}r_n}$

両辺を $\sqrt{2r_{n-1}r_nr_{n+1}}$ で割ると　$\dfrac{1}{\sqrt{2r_n}}+\dfrac{1}{\sqrt{2r_{n-1}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2r_{n+1}}}$　　$\therefore q_{n+1}=q_n+q_{n-1}$

n が偶数のとき、$x_n<x_{n+1}<x_{n-1}$ であるから

$$2\sqrt{r_{n-1}r_n}=x_{n-1}-x_n,\quad 2\sqrt{r_{n-1}r_{n+1}}=x_{n-1}-x_{n+1},\quad 2\sqrt{r_nr_{n+1}}=x_{n+1}-x_n$$

であるが、同様に $q_{n+1}=q_n+q_{n-1}$ が導かれ、n の奇遇に関わらず $q_{n+1}=q_n+q_{n-1}$ が成立する。

$r_0=r_1=\dfrac{1}{2}$ より $q_0=q_1=1$ であり、以下帰納的に、q_n が整数であることが示された。(証明終)

(2)

n が奇数のとき

②の両辺を $2\sqrt{r_{n-1}r_{n+1}}$ で割ると　$1=\dfrac{1}{\sqrt{2r_{n-1}}}\cdot\dfrac{x_{n+1}}{\sqrt{2r_{n+1}}}-\dfrac{1}{\sqrt{2r_{n+1}}}\cdot\dfrac{x_{n-1}}{\sqrt{2r_{n-1}}}$　　$\therefore p_{n+1}q_{n-1}-p_{n-1}q_{n+1}=1$ ——④

③の両辺を $2\sqrt{r_nr_{n+1}}$ で割ると　$1=\dfrac{1}{\sqrt{2r_{n+1}}}\cdot\dfrac{x_n}{\sqrt{2r_n}}-\dfrac{1}{\sqrt{2r_n}}\cdot\dfrac{x_{n+1}}{\sqrt{2r_{n+1}}}$　　$\therefore p_nq_{n+1}-p_{n+1}q_n=1$ ——⑤

④－⑤より　$p_{n+1}(q_n+q_{n-1})-q_{n+1}(p_n+p_{n-1})=0$

$q_{n+1}=q_n+q_{n-1}$ より　$q_{n+1}\{p_{n+1}-(p_n+p_{n-1})\}=0$　　$q_{n+1}\neq 0$ より　$\therefore p_{n+1}=p_n+p_{n-1}$

n が偶数のとき

$$2\sqrt{r_{n-1}r_{n+1}}=x_{n-1}-x_{n+1},\quad 2\sqrt{r_nr_{n+1}}=x_{n+1}-x_n$$

であるが、同様に $p_{n+1}=p_n+p_{n-1}$ が導かれ、n の奇遇に関わらず $p_{n+1}=p_n+p_{n-1}$ が成立する。

$x_0=0,\ x_1=1$ より $p_0=0,\ p_1=1$ であり、以下帰納的に、p_n が整数であることが示された。(証明終)

p_n と q_n は同じ漸化式で表されるが、$q_0 = q_1 = 1$、$p_0 = 0,\ p_1 = 1$ より $q_n = p_{n+1}$ であることがわかる。
したがって、p_n と q_n が互いに素であるとき、p_n と p_{n+1} が互いに素である。

$p_n = ma_n,\ p_{n+1} = ma_{n+1}$ とすると、$p_{n+1} = p_n + p_{n-1}$ より　$ma_{n+1} = ma_n + p_{n-1}$　$\therefore p_{n-1} = m(a_{n+1} - a_n)$
したがって、p_{n-1} も m の倍数であり、以下帰納的に、$p_{n-2},\ \cdots,\ p_2,\ p_1$ も m の倍数である。
ここで $p_1 = 1$ であるから、$m = 1$ しかあり得ない。
以上により、p_n と p_{n+1} は互いに素であり、p_n と q_n が互いに素であることが示された。（証明終）

(3)

$x_n = \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{p_n}{p_{n+1}}$ より　$x_{n+1} = \dfrac{p_{n+1}}{p_{n+2}} = \dfrac{p_{n+1}}{p_{n+1} + p_n} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{p_n}{p_{n+1}}} = \dfrac{1}{1 + x_n}$　$\alpha = \dfrac{1}{1+\alpha}$ を辺々引くと

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{1}{1+x_n} - \frac{1}{1+\alpha} = \frac{\alpha - x_n}{(1+x_n)(1+\alpha)} \quad |x_{n+1} - \alpha| = \frac{1}{(1+x_n)(1+\alpha)}|x_n - \alpha| < \frac{1}{1+\alpha}|x_n - \alpha| = \alpha|x_n - \alpha|$$

$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ であり、$\alpha > 0$ であるから　$\therefore \alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$\dfrac{2}{3} - \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{7 - 3\sqrt{5}}{6} = \dfrac{\sqrt{49} - \sqrt{45}}{6} > 0$ より　$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < \dfrac{2}{3}$　$\therefore |x_{n+1} - \alpha| < \dfrac{2}{3}|x_n - \alpha|$　（証明終）

$$|x_n - \alpha| < \frac{2}{3}|x_{n-1} - \alpha| < \left(\frac{2}{3}\right)^2 |x_{n-2} - \alpha| < \cdots < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} |x_1 - \alpha| \quad \therefore 0 < |x_n - \alpha| < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

はさみうちの原理より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} |x_n - \alpha| = 0$　$\displaystyle\therefore \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$　……(答)