1998年東大理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通

$$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right)$$

$$f'(x)=6x\left(x-a+\frac{1}{a}\right)+(3x^2-4)=9x^2-6\left(a-\frac{1}{a}\right)x-4=(3x-2a)\left(3x+\frac{2}{a}\right)$$

$a>0$のとき

増減表より、$x=-\dfrac{2}{3a}$のとき極大、$x=\dfrac{2}{3}a$のとき極小となる。

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3a}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

極大値と極小値の差を$g(a)$とすると

$$f\left(-\frac{2}{3a}\right)=\left(3\cdot\frac{4}{9a^2}-4\right)\left(-\frac{2}{3a}-a+\frac{1}{a}\right)=4\left(\frac{1}{3a^2}-1\right)\left(\frac{1}{3a}-a\right)=4\left(a-\frac{2}{3a}+\frac{1}{9a^3}\right)$$

$$f\left(\frac{2}{3}a\right)=\left(3\cdot\frac{4}{9}a^2-4\right)\left(\frac{2}{3}a-a+\frac{1}{a}\right)=4\left(\frac{1}{3}a^2-1\right)\left(-\frac{1}{3}a+\frac{1}{a}\right)=-4\left(\frac{1}{9}a^3-\frac{2}{3}a+\frac{1}{a}\right)$$

$$\therefore g(a)=4\left(a-\frac{2}{3a}+\frac{1}{9a^3}+\frac{1}{9}a^3-\frac{2}{3}a+\frac{1}{a}\right)=4\left\{\frac{1}{9}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)+\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right\}=\frac{4}{9}\left(a+\frac{1}{a}\right)^3$$

$g(a)$が最小となるのは、$a+\dfrac{1}{a}$が最小のときである。

$a+\dfrac{1}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{a}}=2$であり、等号成立は$a=\dfrac{1}{a}$のとき、すなわち$a^2=1$のときで、$a>0$より　$\therefore a=1$

$a<0$のとき

$x=\dfrac{2}{3}a$のとき極大、$x=-\dfrac{2}{3a}$のとき極小となり、

$$\therefore g(a)=-\frac{4}{9}\left(a+\frac{1}{a}\right)^3$$

$a>0$のときとの対称性から、$a=-1$において最小となる。

x	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$	$-\frac{2}{3a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

以上により　$\therefore a=\pm1$　……(答)　　$g(a)$の最小値は$\dfrac{32}{9}$である。