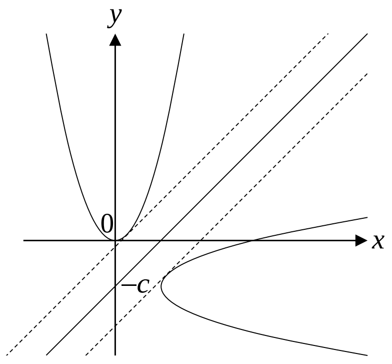
1999年東大文 $\boxed{3}$



放物線 $A: y=x^2$ の点 $P(t,\ t^2)$ と、直線 $y=x-c$ との距離 d は

$$d=\frac{\left|t-t^2-c\right|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+c-\frac{1}{4}\right\}$$

したがって、$t=\dfrac{1}{2}$ のとき、d は最小値 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(c-\dfrac{1}{4}\right)$ をとる。

A 上の点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ における接線は、$y=2\cdot\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{4}=x-\dfrac{1}{4}$ である。

すなわち、d の最小値を与える点 P は、A と $y=x-c$ と平行な A の接線との接点に等しい。

同様に、放物線 B 上の点 Q と、直線 $y=x-c$ との距離 d' が最小になるのは、
Q が B と $y=x-c$ と平行な B の接線との接点に一致したときである。
対称性より、d' の最小値は d の最小値に等しく、求める PQ の最小値は

$$\therefore 2d=\sqrt{2}\left(c-\frac{1}{4}\right)\ \cdots\cdots\text{(答)}$$