1999年東大理 $\boxed{6}$

$$\int_0^\pi e^x \sin^2 x dx = \int_0^\pi e^x \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi e^x dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi e^x \cos 2x dx$$

$I = \int_0^\pi e^x \cos 2x dx$ とおくと

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi (e^x)' \cos 2x dx = \left[e^x \cos 2x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x (\cos 2x)' dx = e^\pi - 1 + 2\int_0^\pi e^x \sin 2x dx \\ &= e^\pi - 1 + 2\left\{\left[e^x \sin 2x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x (\sin 2x)' dx\right\} = e^\pi - 1 + 2\left(0 - 2\int_0^\pi e^x \cos 2x dx\right) = e^\pi - 1 - 4I \end{aligned}$$

$$5I = e^\pi - 1 \quad \therefore I = \frac{e^\pi - 1}{5} \quad \therefore \int_0^\pi e^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\left[e^x\right]_0^\pi - \frac{1}{2}I = \frac{e^\pi - 1}{2} - \frac{e^\pi - 1}{10} = \frac{2}{5}(e^\pi - 1)$$

$\int_0^\pi e^x \sin^2 x dx > 8$ のとき $\frac{2}{5}(e^\pi - 1) > 8$ $\therefore e^\pi > 21$ したがって、$e^\pi > 21$ を示せばよい。

（解答1）

$e^\pi > 2.7^{3.1} = 2.7^3 \times 2.7^{\frac{1}{10}} = 19.683 \times 2.7^{\frac{1}{10}}$ $2.7^{3.1} > 21$ と仮定すると

$2.7^{\frac{1}{10}} > \frac{21}{19.683} = 1.0669\cdots$ より、$2.7^{\frac{1}{10}} > 1.1$、すなわち $2.7 > 1.1^{10}$ が示されれば、仮定は成立する。

$1.1^{10} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k \left(\frac{1}{10}\right)^k$ であり、

${}_{10}C_0 = {}_{10}C_{10} = 1,\ {}_{10}C_1 = {}_{10}C_9 = 10,\ {}_{10}C_2 = {}_{10}C_8 = 45,\ {}_{10}C_3 = {}_{10}C_7 = 120,\ {}_{10}C_4 = {}_{10}C_6 = 210,\ {}_{10}C_5 = 252$ であるから、

$$\begin{aligned} 1.1^{10} &= 1 + 10\times10^{-1} + 45\times10^{-2} + 120\times10^{-3} + 210\times10^{-4} + 252\times10^{-5} + 210\times10^{-6} + 120\times10^{-7} + 45\times10^{-8} \\ &\quad + 10\times10^{-9} + 1\times10^{-10} \\ &= 2 + 0.45 + 0.12 + 0.021 + 0.00252 + 0.00021 + 0.000012 + 0.00000045 + 0.00000001 + 0.0000000001 \\ &= 2.591 + 0.002742 + 0.0000004601 \\ &= 2.5937424601 \end{aligned}$$

したがって、仮定は成立し、$e^\pi > 2.7^{3.1} > 21$ が示された。（証明終）
※筆算で $1.1^{10} = 2.5937424601$ を求めてもまったく構わない。力業でも何でも計算した者勝ち。

（解答2）
$e^\pi > e^{3.1} = e^3 \times e^{0.1}$
ここで、$x=0$ における $y=e^x$ の接線は $y = x+1$ であり、$x>0$ において $e^x > x+1$ であるから

$$e^\pi > e^3 \times e^{0.1} > 2.7^3 \times (0.1+1) = 19.683 \times 1.1 = 21.6513$$

したがって、$e^\pi > 21$ が示された。（証明終）
※知識として知らないと思いつかないだろう。