2001 年東大理 $\boxed{4}$　※2022. 6. 30（1）の計算ミス修正。答えは変わりません。

(1)

$a_1=1,\ a_2=i,\ a_3=1+i,\ a_4=1+2i$ より　$b_1=i,\ b_2=\dfrac{1+i}{i}=1-i,\ b_3=\dfrac{1+2i}{1+i}=\dfrac{(1+2i)(1-i)}{2}=\dfrac{3+i}{2}$

求める円 C の方程式を $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ とすると、$(0,1),(1,-1),\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ を通るので

$$\begin{cases} a^2+b^2-2b+1=r^2 \\ a^2-2a+1+b^2+2b+1=r^2 \\ a^2-3a+\dfrac{9}{4}+b^2-b+\dfrac{1}{4}=r^2 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a^2+b^2-2b+1=r^2 & \text{——①} \\ a^2+b^2-2a+2b+2=r^2 & \text{——②} \\ a^2+b^2-3a-b+\dfrac{5}{2}=r^2 & \text{——③} \end{cases}$$

②－①より　$-2a+4b+1=0$　$\therefore 2a-4b=1$ ——④

③－①より　$-3a+b+\dfrac{3}{2}=0$　$\therefore 6a-2b=3$ ——⑤

④、⑤より　$\therefore a=\dfrac{1}{2},\ b=0$　$\therefore r^2=\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{5}{4}$　以上により、円 C の中心は $\dfrac{1}{2}$、半径は $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ……(答)

(2)

$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ より　$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}+a_n}{a_{n+1}}=1+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=1+\dfrac{1}{b_n}$ ——①

$\left|b_n-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ が成り立つことを、数学的帰納法により示す。$n=1,2,3$ のとき成立。

$n=k$ のとき、$\left|b_k-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ が成り立つと仮定する。

(解答 1)

仮定より

$$\left|b_k-\frac{1}{2}\right|^2=\left(b_k-\frac{1}{2}\right)\overline{\left(b_k-\frac{1}{2}\right)}=\left(b_k-\frac{1}{2}\right)\left(\overline{b_k}-\frac{1}{2}\right)=b_k\overline{b_k}-\frac{1}{2}(b_k+\overline{b_k})+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

$$|b_k|^2-\frac{1}{2}(b_k+\overline{b_k})=1 \quad \therefore b_k+\overline{b_k}=2(|b_k|^2-1) \text{ ——②}$$

①より

$$\left|b_{k+1}-\frac{1}{2}\right|^2=\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{b_k}\right|^2=\frac{|b_k+2|^2}{4|b_k|^2}=\frac{(b_k+2)(\overline{b_k}+2)}{4|b_k|^2}=\frac{b_k\overline{b_k}+2(b_k+\overline{b_k})+4}{4|b_k|^2}=\frac{|b_k|^2+2(b_k+\overline{b_k})+4}{4|b_k|^2}$$

②を代入すると　$\left|b_{k+1}-\dfrac{1}{2}\right|^2=\dfrac{5|b_k|^2}{4|b_k|^2}=\dfrac{5}{4}$　$\therefore \left|b_{k+1}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

したがって、$n=k+1$ においても成立。以上により示された。（証明終）

（解答 2）　成分計算の方が楽？

b_k を表す点は$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cos\theta,\ \dfrac{\sqrt{5}}{2}\sin\theta\right)$とおける。

このとき、①より

$$\left|b_{k+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{b_k}\right|=\left|\frac{b_k+2}{2b_k}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{(5+\sqrt{5}\cos\theta)+(\sqrt{5}\sin\theta)i}{(1+\sqrt{5}\cos\theta)+(\sqrt{5}\sin\theta)i}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5}\cos\theta)^2+5\sin^2\theta}{(1+\sqrt{5}\cos\theta)^2+5\sin^2\theta}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{25+10\sqrt{5}\cos\theta+5\cos^2\theta+5\sin^2\theta}{1+2\sqrt{5}\cos\theta+5\cos^2\theta+5\sin^2\theta}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{30+10\sqrt{5}\cos\theta}{6+2\sqrt{5}\cos\theta}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

したがって、$n=k+1$においても成立。以上により示された。（証明終）