2001 年東大理 $\boxed{6}$

(1)

条件より、a と b の差の絶対値は 0 か 1 であり、a と b の関係は $a=b,\ a=b+1,\ b=a+1$ のいずれかである。

n 回の試行後 $a=b$ であるとき、$n+1$ 回目の試行で必ず $a\neq b$ となる。$n+1$ 回の試行後 $a=b$ となるには、

i) n 回の試行後 $b=a+1$ であり、$n+1$ 回目の試行で表が出る

ii) n 回の試行後 $a=b+1$ であり、$n+1$ 回目の試行で裏が出る

のいずれかであるから　$\therefore X_{n+1}=2^n-X_n$ ……(答)

(2)

(1) で求めた漸化式の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{X_{n+1}}{2^{n+1}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{X_n}{2^n}+\frac{1}{2}\qquad \frac{X_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(\frac{X_n}{2^n}-\frac{1}{3}\right)\qquad \frac{X_n}{2^n}-\frac{1}{3}=\left(\frac{X_1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

最初、$A,\ B$ はともに原点にあり、$X_1=0$ であるから

$$\frac{X_n}{2^n}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\qquad \therefore X_n=\frac{2^n}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{2^n+2(-1)^n}{3}\quad \text{……(答)}$$

(3)

n 回の試行後、$a=b$ である確率は　$\dfrac{X_n}{2^n}=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

対称性から、$b=a+1$ である確率と $a=b+1$ である確率は等しく、余事象より　$\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{X_n}{2^n}\right)=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right\}$

$n+1$ 回目の試行で表が出れば a は必ず 1 増える。$n+1$ 回目の試行で裏が出れば、$b=a+1$ のときのみ a は 1 増えて、それ以外のとき a は変わらない。求めるのは a の期待値であり、これを $E_n(a)$ とすると

$$\begin{aligned}E_{n+1}(a)&=\frac{1}{2}\{E_n(a)+1\}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}\{E_n(a)+1\}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}E_n(a)\\&=\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}E_n(a)+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}=E_n(a)+\frac{1}{3}\left\{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}\end{aligned}$$

$E_1(a)=1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ より　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\{E_{k+1}(a)-E_k(a)\}=E_n(a)-E_1(a)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right\}$

$$\therefore E_n(a)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}(n-1)+\frac{1}{12}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}n-\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}-\frac{1}{9}\quad \text{……(答)}$$

$n=1$ でも成立する。