

2002 年東大文 [4]

円周上に m 個の赤い点が並んでおり、 m 個の両端の点が赤い弧に分けられているとする。

今、いずれかの点と点の間に青い点を 1 個ずつ順に置き、2 個の弧に分割する操作を考える。

i) 新たに青い点を置く弧の両端の点が青いとき

その弧は、2 つの両端の点が青い弧に分けられる。すなわち、両端の点の色が異なる弧は増えない。

ii) 新たに青い点を置く弧の両端の点が赤いとき

その弧は、2 つの両端の点の色が異なる弧に分けられる。すなわち、両端の点の色が異なる弧が 2 つ増える。

iii) 新たに青い点を置く弧の両端の点の色が異なるとき

その弧は、両端の点の色が異なる弧と、両端の点が青い弧に分けられる。すなわち、両端の点の色が異なる弧は増えない。

したがって、新たに青い点を置く毎に、両端の点の色が異なる弧は増えないか、2 個増えるかのいずれかである。最初、両端の点の色が異なる弧は 0 個であるから、 n 個の青い点を置き終えたとき、両端の点の色が異なる弧の個数は偶数である。以上により示された。(証明終)