2002 年東大理 $\boxed{4}$

C 上の点 $Q\left(t,\ \dfrac{t^2}{t^2+1}\right)\ (t \neq 0)$ を考える。 $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}=1-\dfrac{1}{x^2+1}$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

Q における C の接線の傾きは $\dfrac{2t}{(t^2+1)^2}$ であるから、Q を通る C の法線の式は

$$y=-\frac{(t^2+1)^2}{2t}(x-t)+1-\frac{1}{t^2+1}=-\frac{(t^2+1)^2}{2t}x+\frac{(t^2+1)^2}{2}-\frac{1}{t^2+1}+1$$

これが $P(0,\ a)$ を通るとき $\quad \therefore a=\dfrac{(t^2+1)^2}{2}-\dfrac{1}{t^2+1}+1$

$u=t^2+1$ とおくと $u>1$ であり、$u>1$ において $a=\dfrac{u^2}{2}-\dfrac{1}{u}+1$ を満たす a が存在すればよい。

$f(u)=\dfrac{u^2}{2}-\dfrac{1}{u}+1$ とすると $\quad f'(u)=u+\dfrac{1}{u^2}>0$ したがって、 $f(u)$ は $u>1$ において単調増加。

$f(1)=\dfrac{1}{2}$ より、求める範囲は $\quad \therefore a>\dfrac{1}{2}$ ……(答)