2003 年東大文 $\boxed{1}$

$f(x)=ax^2+bx+c \quad f(-1)=a-b+c=-1 \quad f(1)=a+b+c=1 \quad \therefore b=1,\ c=-a$

$f'(x)=2ax+1 \quad f'(1)=2a+1\leqq 6 \quad \therefore a\leqq \dfrac{5}{2}$ ——①

これより　$3x^2-1-f(x)=3x^2-1-(ax^2+x-a)=(3-a)x^2-x+a-1$

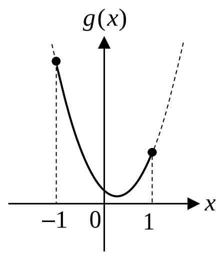
$g(x)=(3-a)x^2-x+a-1$ とおくと　$g(-1)=2+1=3>0 \quad g(1)=2-1=1>0$

$-1\leqq x\leqq 1$ において $g(x)\geqq 0$ となる条件を考える。

①より下に凸であり、$g(x)=(3-a)\left\{x-\dfrac{1}{2(3-a)}\right\}^2-\dfrac{1}{4(3-a)}+a-1$

軸 $\dfrac{1}{2(3-a)}$ について、①より　$0<\dfrac{1}{2(3-a)}\leqq 1$

$-\dfrac{1}{4(3-a)}+a-1\geqq 0$ であればよい。



$-1+4(a-1)(3-a)\geqq 0 \quad 4a^2-16a+13\leqq 0$

$4\left\{a-\left(2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\left\{a-\left(2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\leqq 0 \quad \therefore 2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq 2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ——②

①と②より、$-1\leqq x\leqq 1$ において $g(x)\geqq 0$ となる条件は　$\therefore 2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq \dfrac{5}{2}$

$\{f'(x)\}^2=4ax^2+4ax+1$

奇数次の項は除いてよいから　$\therefore I=2\displaystyle\int_0^1(4a^2x^2+1)dx=2\left[\dfrac{4}{3}a^2x^3+x\right]_0^1=\dfrac{8}{3}a^2+2$

$2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq \dfrac{5}{2}$ のとき、I は単調増加であるから

$\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{19}{4}-2\sqrt{3}\right)+2\leqq I\leqq \dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{25}{4}+2 \quad \therefore \dfrac{44-16\sqrt{3}}{3}\leqq I\leqq \dfrac{56}{3}$ ……(答)