2003 年東大文 $\boxed{3}$

(1)

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=1$

　$s_1=\alpha+\beta=4$ ……(答)　$s_2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16-2=14$ ……(答)

　$s_3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=64-12=52$ ……(答)

また、$n\geqq 3$のとき $s_{n-1}=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$ より

　$(\alpha+\beta)s_{n-1}=4s_{n-1}=(\alpha+\beta)(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})=(\alpha^n+\beta^n)+\alpha\beta(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})=s_n+s_{n-2}$

　$\therefore s_n=4s_{n-1}-s_{n-2}$ ……(答)

(2)

$\alpha=2+\sqrt{3},\ \beta=2-\sqrt{3}>0$　$s_n=\alpha^n+\beta^n$ であるから　$s_n>0$

$n\geqq 3$のとき $s_n=4s_{n-1}-s_{n-2}$ であるから、$s_{n-1},\ s_{n-2}$ が正の整数であれば s_n も正の整数である。

$s_1=4,\ s_2=14$ であるから、以下帰納的に s_n は正の整数であることがわかる。(証明終)

s_n の 1 の位の数を調べる。$s_{n-1},\ s_{n-2}$ の 1 の位の数をそれぞれ $t_{n-1},\ t_{n-2}$ とすると、

t_n は $4t_{n-1}-t_{n-2}$ を 10 で割った余りであるから

　$t_1=4,\ t_2=4$　$4t_2-t_1=12$　$\therefore t_3=2$　$4t_3-t_2=4$　$\therefore t_4=4$　$4t_4-t_3=14$　$\therefore t_5=4$

したがって、t_n は $4,\ 4,\ 2,\ 4,\ 4,\ 2,\ \cdots$ の繰り返しとなる。

$m\geqq 1$のとき　$\therefore t_{3m-2}=t_{3m-1}=4,\ t_{3m}=2$

$2003=3\times 668-1$ より　$\therefore t_{2003}=4$　求める数は 4 ……(答)

(3)

$s_{2003}=\alpha^{2003}+\beta^{2003}$ より　$\alpha^{2003}=s_{2003}-\beta^{2003}$

$\beta=2-\sqrt{3}$ であるから　$0<\beta<1$　$\therefore 0<\beta^{2003}<1$

したがって、α^{2003} 以下の最大の整数は $s_{2003}-1$ であるから、(2) より求める数は 3 ……(答)