

2004 年東大文 [3]

(1)

$$f(x) = x^3 - 3x \quad f'(x) = 3(x^2 - 1) = 3(x+1)(x-1)$$

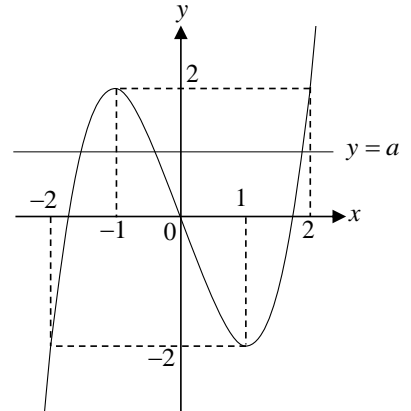
$x = -1$ のとき極大値 2 をとり、 $x = 1$ のとき極小値 -2 をとる。

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

$y = f(x)$ のグラフの概形は右図の通り。

$y = a$ との交点の個数を考えればよい。

$$\therefore \begin{cases} a < -2, 2 < a \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a = \pm 2 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \dots\dots (\text{答}) \\ -2 < a < 2 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$



(2)

$g(x) = f(f(x)) = 0$ を満たす実数 $f(x)$ は、 $f(x) = 0, \pm\sqrt{3}$ の 3 個。

$f(x) = 0$ を満たす実数 x は、 $x = 0, \pm\sqrt{3}$ の 3 個。

(1) より、 $f(x) = \pm\sqrt{3}$ を満たす実数 x は、それぞれ 3 個。

以上により、 $g(x) = 0$ を満たす実数 x は $\therefore 9$ 個 $\dots\dots (\text{答})$

(3)

$h(x) = f(g(x)) = 0$ を満たす実数 $g(x)$ は、 $g(x) = 0, \pm\sqrt{3}$ の 3 個。

(2) より、 $g(x) = 0$ を満たす実数 x は、9 個。

$g(x) = f(f(x)) = \sqrt{3}$ を満たす実数 $f(x)$ は 3 個であり、いずれも $-2 < f(x) < 2$ を満たす。

それぞれについて、対応する実数 x は 3 個であるから、 $g(x) = \sqrt{3}$ を満たす実数 x は 9 個。

同様に、 $g(x) = -\sqrt{3}$ を満たす実数 x は 9 個。

以上により、 $h(x) = 0$ を満たす実数 x は $\therefore 27$ 個 $\dots\dots (\text{答})$

※(1) は理系 [4] と共通。