2005年東大理後期$\boxed{2}$

(1)

得点がk以下となるのは、最終ラウンドまで続行となった場合のみである。

得点が$1, 2, \cdots, k$となる確率は、それぞれ　$\left(\dfrac{k}{10}\right)^{r-1} \cdot \dfrac{1}{10}$

また、第iラウンドで停止し、得点が$k+1, k+2, \cdots, 10$となる確率は、それぞれ　$\left(\dfrac{k}{10}\right)^{i-1} \cdot \dfrac{1}{10}$　$(1 \leqq i \leqq r)$

得点が$k+1, k+2, \cdots, 10$となる確率は、それぞれ　$\dfrac{1}{10}\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\left(\dfrac{k}{10}\right)^{i-1} = \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1-\left(\dfrac{k}{10}\right)^r}{1-\dfrac{k}{10}} = \dfrac{1}{10-k}\left\{1-\left(\dfrac{k}{10}\right)^r\right\}$

求める期待値は

$$
\begin{aligned}
E_k(r) &= (1+2+\cdots+k) \cdot \left(\frac{k}{10}\right)^{r-1} \cdot \frac{1}{10} + \{(k+1)+(k+2)+\cdots+10\} \cdot \frac{1}{10-k}\left\{1-\left(\frac{k}{10}\right)^r\right\} \\
&= \frac{k(k+1)}{2} \cdot \left(\frac{k}{10}\right)^{r-1} \cdot \frac{1}{10} + \left\{55-\frac{k(k+1)}{2}\right\} \cdot \frac{1}{10-k}\left\{1-\left(\frac{k}{10}\right)^r\right\} \\
&= \frac{k+1}{2} \cdot \left(\frac{k}{10}\right)^r + \frac{110-k-k^2}{2} \cdot \frac{1}{10-k}\left\{1-\left(\frac{k}{10}\right)^r\right\} = \frac{k+1}{2} \cdot \left(\frac{k}{10}\right)^r + \frac{(10-k)(11+k)}{2} \cdot \frac{1}{10-k}\left\{1-\left(\frac{k}{10}\right)^r\right\} \\
&= \frac{k+1}{2} \cdot \left(\frac{k}{10}\right)^r + \frac{11+k}{2} \cdot \left\{1-\left(\frac{k}{10}\right)^r\right\} = \frac{11+k}{2} + \left(\frac{k+1}{2}-\frac{11+k}{2}\right) \cdot \left(\frac{k}{10}\right)^r
\end{aligned}
$$

$\therefore E_k(r) = \dfrac{11+k}{2} - 5 \cdot \left(\dfrac{k}{10}\right)^r$ ……(答)

(2)

(1)において$r=2$とすれば十分であり、このとき　$E_k(2) = \dfrac{11+k}{2} - \dfrac{k^2}{20} = -\dfrac{1}{20}(k-5)^2 + \dfrac{27}{4}$

したがって、$k=5$のとき最大であるから、

第1ラウンドの戦略は、5以下なら続行、6以上なら停止。期待値は$\dfrac{27}{4}$ ……(答)

(3)

以下のように戦略を仮定する。

第1ラウンドはl以下なら続行、$l+1$以上なら停止。第2ラウンドはm以下なら続行、$m+1$以上なら停止。

第1ラウンドで停止し、得点が$l+1, l+2, \cdots, 10$となる確率は、それぞれ　$\dfrac{1}{10}$

第2ラウンドで停止し、得点が$m+1, m+2, \cdots, 10$となる確率は、それぞれ　$\dfrac{l}{10} \cdot \dfrac{1}{10} = \dfrac{l}{100}$

第3ラウンドで停止し、得点が$1, 2, \cdots, 10$となる確率は、それぞれ　$\dfrac{l}{10} \cdot \dfrac{m}{10} \cdot \dfrac{1}{10} = \dfrac{lm}{1000}$

このときの得点の期待値は

$$\{(l+1)+(l+2)+\cdots+10\}\cdot\frac{1}{10}+\{(m+1)+(m+2)+\cdots+10\}\cdot\frac{l}{100}+(1+2+\cdots+10)\cdot\frac{lm}{1000}$$
$$=\left\{55-\frac{l(l+1)}{2}\right\}\cdot\frac{1}{10}+\left\{55-\frac{m(m+1)}{2}\right\}\cdot\frac{l}{100}+55\cdot\frac{lm}{1000}=\frac{110-l-l^2}{20}+l\cdot\left\{\frac{110-m-m^2}{200}+\frac{11}{200}m\right\}$$
$$=\frac{110-l-l^2}{20}+l\cdot\left(-\frac{1}{200}m^2+\frac{1}{20}m+\frac{11}{20}\right)=\frac{110-l-l^2}{20}+l\cdot\left\{-\frac{1}{200}(m-5)^2+\frac{27}{40}\right\}$$

l を固定して考えたとき、最大になるのは $m=5$ のときである。このときの得点の期待値は

$$\frac{110-l-l^2}{20}+\frac{27}{40}l=-\frac{1}{20}l^2+\frac{5}{8}l+\frac{11}{2}=-\frac{1}{20}\left(l-\frac{25}{4}\right)^2+\frac{477}{64}$$

$\frac{25}{4}=6.25$ で、l は自然数であるから、$l=6$ のとき最大となる。このときの期待値は $-\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{16}+\frac{477}{64}=\frac{149}{20}$

以上により、

第 1 ラウンドの戦略は、6 以下なら続行、7 以上なら停止。

第 2 ラウンドの戦略は、5 以下なら続行、6 以上なら停止。

期待値は $\frac{149}{20}$ ……(答)