2005 年東大理 $\boxed{2}$

（解答 1）　ごたごた

$w=z^2-2z$ と表されるとき　$w=(z-1)^2-1$　$(z-1)^2=w+1$

$w+1=R^2e^{i2\theta}$ とおく。$R>0$ は実数である。

このとき　$z-1=\pm Re^{i\theta}$　$z=1\pm Re^{i\theta}=(1\pm R\cos\theta)\pm iR\sin\theta$

$z_1=(1+R\cos\theta)+iR\sin\theta,\ z_2=(1-R\cos\theta)-iR\sin\theta$ とおき、$|z_1|\leqq\dfrac{5}{4}$ かつ $|z_2|\leqq\dfrac{5}{4}$ となる条件を考える。

$|z_1|^2=1+2R\cos\theta+R^2\leqq\dfrac{25}{16}$　$R^2+2R\cos\theta-\dfrac{9}{16}\leqq 0$　$\therefore 0<R\leqq-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+\dfrac{9}{16}}$ ——①

$|z_2|^2=1-2R\cos\theta+R^2\leqq\dfrac{25}{16}$　$R^2-2R\cos\theta-\dfrac{9}{16}\leqq 0$　$\therefore 0<R\leqq\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+\dfrac{9}{16}}$ ——②

①かつ②が成り立つから　$\therefore 0<R\leqq-|\cos\theta|+\sqrt{\cos^2\theta+\dfrac{9}{16}}$ ——③

$-1\leqq t\leqq 1$ で定義される関数 $f(t)=-|t|+\sqrt{t^2+a^2}$ を考える。

$-1\leqq t\leqq 0$ のとき　$f(t)=t+\sqrt{t^2+a^2}$　$f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+a^2}}>0$

$0\leqq t\leqq 1$ のとき　$f(t)=-t+\sqrt{t^2+a^2}$　$f'(t)=-1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+a^2}}<0$

$-1\leqq t\leqq 0$ のとき単調増加、$0\leqq t\leqq 1$ のとき単調減少であるから、$f(t)$ が最大となるのは $t=0$ のとき。

すなわち、③において R の取り得る範囲が最大になるのは $\cos\theta=0$ のときである。　$\therefore 0<R\leqq\dfrac{3}{4}$

一方、$w=R^2e^{i2\theta}-1=R^2\cos 2\theta-1+iR^2\sin 2\theta$ より　$|w|^2=R^4-2R^2\cos 2\theta+1$

R を固定したとき、$|w|^2$ が最大になるのは $\cos 2\theta=-1$ のときで、$|w|^2=R^4+2R^2+1=(R^2+1)^2$

$\cos 2\theta=-1$ のとき　$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=-1$　$\therefore\cos\theta=0$

これは、③において R の取り得る範囲が最大になる条件と一致する。

以上により、$|z|\leqq\dfrac{5}{4}$ の条件下で $w=z^2-2z$ の絶対値 $|w|$ が最大になるのは、$\cos\theta=0,\ R=\dfrac{3}{4}$ のとき。

求める w は　$\therefore w=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2e^{i\pi}-1=-\dfrac{25}{16}$ ……（答）

なお、このとき $z=1\pm\dfrac{3}{4}i$ であり、$|z|=\sqrt{1+\dfrac{9}{16}}=\dfrac{5}{4}$ である。

（解答 2）　すっきり

$w=z^2-2z$ と表されるとき、$z^2-2z-w=0$ であり、これは z に関する 2 次方程式である。

$z^2-2z-w=0$ の 2 解を z_1, z_2 とすると、解と係数の関係より

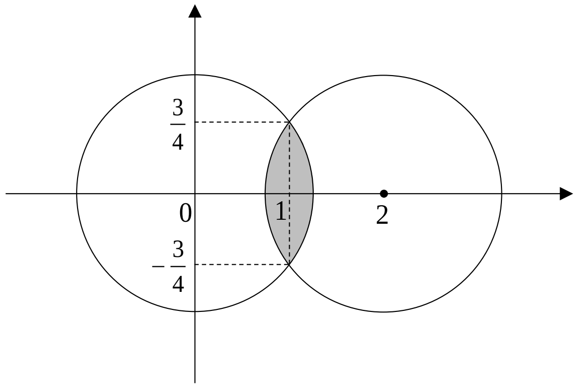
$z_1+z_2=2$ ——①　$z_1z_2=-w$ ——②

$|z_1|\leqq\frac{5}{4}$, $|z_2|\leqq\frac{5}{4}$ であるから、②より　$|w|=|z_1||z_2|\leqq\frac{25}{16}$

$|w|$ が最大になるのは、$|z_1|=|z_2|=\frac{5}{4}$ のときである。

①より、$|z_1|\leqq\frac{5}{4}$, $|2-z_1|\leqq\frac{5}{4}$ であるから、$z^2-2z-w=0$ の 2 解は、

複素数平面上で、$|z|\leqq\frac{5}{4}$, $|z-2|\leqq\frac{5}{4}$ を満たす範囲にある。



結局、$|z_1|=|z_2|=\frac{5}{4}$ となるのは、2 円 $|z|=\frac{5}{4}$, $|z-2|=\frac{5}{4}$ の交点

である。

交点を求めると、$z=1\pm\frac{3}{4}i$ であるから、求める w は

$$\therefore w=-\left(1+\frac{3}{4}i\right)\left(1-\frac{3}{4}i\right)=-\frac{25}{16}\quad\cdots\cdots(答)$$

※出題者が意図した解答は、（解答 2）か？