

2006 年東大文 [2]

(1)

最初の×も含め、すべての記号の出方を列挙する。最後は○で終わるので

×○○ ××○○ ×○×○

$$\begin{aligned}\therefore p_2 &= (1-p)p + p(1-p)p + (1-p)(1-p)(1-p) = (1-p)\{p + p^2 + (1-p)^2\} \\ &= (1-p)(1-p + 2p^2) \dots\dots (\text{答})\end{aligned}$$

(2)

同様に、すべての記号の出方を列挙する。

×○○○ ××○○○ ×○×○○ ×○○×○

$$\begin{aligned}\therefore p_3 &= (1-p)p^2 + p(1-p)p^2 + (1-p)(1-p)(1-p)p + (1-p)p(1-p)(1-p) \\ &= (1-p)p\{p + p^2 + 2(1-p)^2\} \\ &= (1-p)p(2 - 3p + 3p^2) \dots\dots (\text{答})\end{aligned}$$

(3)

最初の×を除けば、○が n 回出るまでに×は 1 回以下しか出ない。

最初の×以外に×が出ない場合

1 回目の操作で直前の記号と違う記号が出て、その後 $n-1$ 回は直前の記号と同じ記号が出る。

確率は $(1-p)p^{n-1}$

最初の×に続いて×が出て、以降○が出る場合

1 回目の操作で直前の記号と同じ記号が出て、2 回目の操作で直前の記号と違う記号が出て、

その後 $n-1$ 回は直前の記号と同じ記号が出る。確率は $p(1-p)p^{n-1} = (1-p)p^n$

最初の×の次に○が出て、以降×が 1 回出る場合

1 回目の操作で直前の記号と違う記号が出る。その後、 n 回の操作中、直前の記号と違う記号が 2 回出て、その他の $n-2$ 回は直前の記号と同じ記号が出る。×が入る場所は ${}_{n-1}C_1 = n-1$ 通りであるから

確率は $(1-p) \times (n-1)(1-p)^2 p^{n-2} = (n-1)(1-p)^3 p^{n-2}$

$$\begin{aligned}\therefore p_n &= (1-p)p^{n-1} + (1-p)p^n + (n-1)(1-p)^3 p^{n-2} = (1-p)p^{n-2}\{p + p^2 + (n-1)(1-p)^2\} \\ &= (1-p)p^{n-2}\{n-1 - (2n-3)p + np^2\} \dots\dots (\text{答})\end{aligned}$$