2006 年東大文 4

$-1 \leqq x \leqq 1$ より　$x+1 \geqq 0,\ x-1 \leqq 0$　$|x+1| = x+1,\ |x-1| = 1-x$

$$f(x) = (x+1)^3 + |x-\cos2\theta|^3 + (1-x)^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + |x-\cos2\theta|^2 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3$$
$$= 6x^2 + 2 + |x-\cos2\theta|^3$$

$0° < \theta < 45°$ より　$\dfrac{1}{\sqrt{2}} < \cos\theta < 1$　$0° < 2\theta < 90°$ より　$0 < \cos2\theta < 1$

$-1 \leqq x < \cos2\theta$ のとき　$f(x) = 6x^2 + 2 + (\cos2\theta - x)^3$

$$f'(x) = 12x - 3(\cos2\theta - x)^2 = -3\{x^2 - 2(\cos2\theta + 2) + \cos^2 2\theta\}$$

$f'(x) = 0$ を解くと

$$x = \cos2\theta + 2 \pm \sqrt{(\cos2\theta+2)^2 - \cos^2 2\theta} = 2\cos^2\theta + 1 \pm 2\sqrt{\cos2\theta + 1} = 2\cos^2\theta + 1 \pm 2\sqrt{2\cos^2\theta}$$
$$= 2\cos^2\theta + 1 \pm 2\sqrt{2}\cos\theta = (\sqrt{2}\cos\theta \pm 1)^2$$

$$\cos2\theta - (\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2 = 2(\sqrt{2}\cos\theta - 1) > 0 \qquad (\sqrt{2}\cos\theta + 1)^2 - \cos2\theta = 2(\sqrt{2}\cos\theta + 1) > 0$$

$\cos2\theta \leqq x \leqq 1$ のとき　$f(x) = 6x^2 + 2 + (x - \cos2\theta)^3$

$$f'(x) = 12x + 3(x - \cos2\theta)^2 = 3\{x^2 - 2(\cos2\theta - 2) + \cos^2 2\theta\}$$

$f'(x) = 0$ を解くと

$$x = \cos2\theta - 2 \pm \sqrt{(\cos2\theta-2)^2 - \cos^2 2\theta} = -2\cos^2\theta - 1 \pm 2\sqrt{1-\cos2\theta} = -2\sin^2\theta - 1 \pm 2\sqrt{2\sin^2\theta}$$
$$= -2\sin^2\theta - 1 \pm 2\sqrt{2}\sin\theta = -(\sqrt{2}\sin\theta \pm 1)^2 < 0 < \cos2\theta$$

以上により、$-1 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の増減は下の通り。

$f(x)$ の最小値を与える x は　$\therefore x = (\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2$　……（答）

x	-1	$\cdots$	$(\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2$	$\cdots$	$\cos2\theta$	$\cdots$	1
$f'(x)$		－	0	＋	＋	＋	
$f(x)$		↘		↗	↗	↗	