2007年東大文 $\boxed{2}$

n 回の操作で得られる 2^n 個の円の半径を、r_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n)$ とする。

(1)

n 回の操作で得られる 2^n 個の円の周の長さの和を L_n とすると　$L_n=2\pi\sum_{k=1}^{2^n} r_k$

半径 r_k の円は、1 回の操作で半径 $rr_k,\ (1-r)r_k$ の 2 円となり、この周の長さの和は

$$2\pi rr_k+2\pi(1-r)r_k=2\pi\{r+(1-r)\}r_k=2\pi r_k$$

したがって、元の円の周の長さと変わらないから　$\therefore L_{n+1}=2\pi\sum_{k=1}^{2^n} r_k=L_n$

L_n は一定であり、最初は半径 1 の円であるから　$\therefore L_n=2\pi$　……(答)

(2)

1 回目の操作で、半径 1 の円は、半径 $r,\ 1-r$ の 2 円となる。

2 回目の操作で、半径 r の円は、$r^2,\ r(1-r)$ の 2 円となり、半径 $1-r$ の円は、$(1-r)r,\ (1-r)^2$ の 2 円となる。

2 回の操作後、半径 r^2 の円が 1 個、半径 $r(1-r)$ の円が 2 個、半径 $(1-r)^2$ の円が 1 個できるから

$$\pi\left\{r^4+2r^2(1-r)^2+(1-r)^4\right\}=\pi\left\{r^2+(1-r)^2\right\}^2=\pi(2r^2-2r+1)^2$$ ……(答)

(3)

n 回の操作で得られる 2^n 個の円の面積の和を S_n とすると　$S_n=\pi\sum_{k=1}^{2^n} {r_k}^2$

半径 r_k の円は、1 回の操作で半径 $rr_k,\ (1-r)r_k$ の 2 円となり、この面積の和は

$$\pi r^2{r_k}^2+\pi(1-r)^2{r_k}^2=\pi\left\{r^2+(1-r)^2\right\}{r_k}^2=\pi(2r^2-2r+1){r_k}^2$$

これは元の円の面積の $2r^2-2r+1$ 倍であるから　$\therefore S_{n+1}=\pi(2r^2-2r+1)\sum_{k=1}^{2^n}{r_k}^2=(2r^2-2r+1)S_n$

S_n は公比 $2r^2-2r+1$ の等比数列であり、最初は半径 1 の円であるから　$S_n=\pi(2r^2-2r+1)^n$　……(答)