2007年東大理後期 $\boxed{3}$

(1)

数学的帰納法で示す。

$n=1$ のとき　$p_1=p_0=x_1,\ q_1=q_0=x_N$ であるから　$\therefore x_1 \leqq p_1 < q_1 \leqq x_N$

$\dfrac{p_0+q_0}{2}=\dfrac{x_1+x_N}{2}$ であり、$\dfrac{x_1+x_N}{2}-x_1=\dfrac{x_N-x_1}{2}>0,\ \dfrac{x_1+x_N}{2}-x_N=-\dfrac{x_N-x_1}{2}<0$ であるから、

少なくとも、x_1 は $x_i \leqq \dfrac{p_0+q_0}{2}$ を満たし、x_N は満たさないので、k_1 は $1 \leqq k_1 \leqq N-1$ なる自然数。

したがって、$n=1$ のとき成立。

$n=2$ のとき　$k_2=k_1$ であるから　$\therefore 1 \leqq k_2 \leqq N-1$

$p_2=\dfrac{1}{k_2}\sum_{i=1}^{k_2}x_i$ より　$p_2-x_1=\dfrac{1}{k_2}\sum_{i=1}^{k_2}x_i-x_1=\dfrac{1}{k_2}\sum_{i=1}^{k_2}(x_i-x_1)\geqq 0$

$q_2=\dfrac{1}{N-k_2}\sum_{i=k_2+1}^{N}x_i$ より　$x_N-q_2=x_N-\dfrac{1}{N-k_2}\sum_{i=k_2+1}^{N}x_i=\dfrac{1}{N-k_2}\sum_{i=k_2+1}^{N}(x_N-x_i)\geqq 0$

また、p_2 は $x_i \leqq \dfrac{x_1+x_N}{2}$ を満たす x_i の平均値であり、q_2 は $x_i > \dfrac{x_1+x_N}{2}$ を満たす x_i の平均値であるから、

$p_2<q_2$ は明らかである。　$\therefore x_1 \leqq p_2 < q_2 \leqq x_N$

したがって、$n=2$ のとき成立。

$n=2l-1,\ 2l$ のとき、成立すると仮定する。

$n=2l+1$ のとき　$p_{2l+1}=p_{2l},\ q_{2l+1}=q_{2l}$ であるから、仮定より　$\therefore x_1 \leqq p_{2l+1} < q_{2l+1} \leqq x_N$

$\dfrac{p_{2l}+q_{2l}}{2}-x_1=\dfrac{(p_{2l}-x_1)+(q_{2l}-x_1)}{2}>0,\ \dfrac{p_{2l}+q_{2l}}{2}-x_N=-\dfrac{(x_N-p_{2l})+(x_N-q_{2l})}{2}<0$ であるから、

少なくとも、x_1 は $x_i \leqq \dfrac{p_{2l}+q_{2l}}{2}$ を満たし、x_N は満たさないので、k_{2l+1} は $1 \leqq k_{2l+1} \leqq N-1$ なる自然数。

したがって、$n=2l+1$ のとき成立。

$n=2l+2$ のとき　$k_{2l+2}=k_{2l+1}$ であるから　$\therefore 1 \leqq k_{2l+2} \leqq N-1$

$p_{2l+2}=\dfrac{1}{k_{2l+2}}\sum_{i=1}^{k_{2l+2}}x_i$ より　$p_{2l+2}-x_1=\dfrac{1}{k_{2l+2}}\sum_{i=1}^{k_{2l+2}}x_i-x_1=\dfrac{1}{k_{2l+1}}\sum_{i=1}^{k_{2l+2}}(x_i-x_1)\geqq 0$

$q_{2l+2}=\dfrac{1}{N-k_{2l+2}}\sum_{i=k_{2l+2}+1}^{N}x_i$ より　$x_N-q_{2l+2}=x_N-\dfrac{1}{N-k_{2l+2}}\sum_{i=k_{2l+2}+1}^{N}x_i=\dfrac{1}{N-k_{2l+2}}\sum_{i=k_{2l+2}+1}^{N}(x_N-x_i)\geqq 0$

p_{2l+2} は $x_i \leqq \dfrac{p_{2l}+q_{2l}}{2}$ を満たす x_i の平均値であり、q_{2l+2} は $x_i > \dfrac{p_{2l}+q_{2l}}{2}$ を満たす x_i の平均値であるから、

$p_{2l+2}<q_{2l+1}$ は明らかである。　$\therefore x_1 \leqq p_{2l+2} < q_{2l+2} \leqq x_N$

したがって、$n=2l+2$ のとき成立。

以上により、題意は示された。（証明終）

(2)

$$J_n = \sum_{i=1}^{k_n}(x_i - p_n)^2 + \sum_{i=k_n+1}^{N}(x_i - q_n)^2 = \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 - 2p_n\sum_{i=1}^{k_n} x_i - 2q_n\sum_{i=k_n+1}^{N} x_i + k_n {p_n}^2 + (N-k_n){q_n}^2$$

nが偶数のとき　$\sum_{i=1}^{k_n} x_i = k_n p_n,\ \sum_{i=k_n+1}^{N} x_i = (N-k_n)q_n$であるから

$$J_n = \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 - 2k_n{p_n}^2 - 2(N-k_n){q_n}^2 + k_n{p_n}^2 + (N-k_n){q_n}^2 = \sum_{i=1}^{N}{x_i}^2 - k_n{p_n}^2 - (N-k_n){q_n}^2$$

$k_n = k_{n-1}$より

$$\begin{aligned} J_{n-1} &= \sum_{i=1}^{N}{x_i}^2 - 2p_{n-1}\sum_{i=1}^{k_n} x_i - 2q_{n-1}\sum_{i=k_n+1}^{N} x_i + k_n{p_{n-1}}^2 + (N-k_n){q_{n-1}}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N}{x_i}^2 - 2k_n p_{n-1}p_n - 2(N-k_n)q_{n-1}q_n + k_n{p_{n-1}}^2 + (N-k_n){q_{n-1}}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N}{x_i}^2 + k_n(p_n - p_{n-1})^2 + (N-k_n)(q_n - q_{n-1})^2 - k_n{p_n}^2 - (N-k_n){q_n}^2 \\ &= J_n + k_n(p_n - p_{n-1})^2 + (N-k_n)(q_n - q_{n-1})^2 \end{aligned}$$

$\therefore J_n \leqq J_{n-1}$

nが奇数のとき　$p_n = p_{n-1},\ q_n = q_{n-1}$であり、$\sum_{i=1}^{k_{n-1}} x_i = k_{n-1}p_n,\ \sum_{i=k_{n-1}+1}^{N} x_i = (N-k_{n-1})q_n$

$$J_{n-1} = \sum_{i=1}^{N}{x_i}^2 - k_{n-1}{p_n}^2 - (N-k_{n-1}){q_n}^2$$

$$J_n = \sum_{i=1}^{N}{x_i}^2 - 2p_n\sum_{i=1}^{k_n} x_i - 2q_n\sum_{i=k_n+1}^{N} x_i + k_n{p_n}^2 + (N-k_n){q_n}^2$$

k_nとk_{n-1}の大小関係は不明である。

$k_n = k_{n-1}$のとき

$$\begin{aligned} J_n &= \sum_{i=1}^{N}{x_i}^2 - 2p_n\sum_{i=1}^{k_{n-1}} x_i - 2q_n\sum_{i=k_{n-1}+1}^{N} x_i + k_{n-1}{p_n}^2 + (N-k_{n-1}){q_n}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N}{x_i}^2 - 2k_{n-1}{p_n}^2 - 2(N-k_{n-1}){q_n}^2 + k_{n-1}{p_n}^2 + (N-k_{n-1}){q_n}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N}{x_i}^2 - k_{n-1}{p_n}^2 - (N-k_{n-1}){q_n}^2 = J_{n-1} \end{aligned}$$

$\therefore J_n = J_{n-1}$

$k_n > k_{n-1}$のとき

$$\sum_{i=1}^{k_n} x_i = \sum_{i=1}^{k_{n-1}} x_i + \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} x_i = k_{n-1}p_n + \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} x_i \qquad \sum_{i=k_n+1}^{N} x_i = \sum_{i=k_{n-1}+1}^{N} x_i - \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} x_i = (N-k_{n-1})q_n - \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} x_i$$

であるから

$$J_n = \sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2} - 2p_n\left(k_{n-1}p_n + \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} x_i\right) - 2q_n\left\{(N-k_{n-1})q_n - \sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} x_i\right\} + k_n p_n^{\,2} + (N-k_n)q_n^{\,2}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2} - 2k_{n-1}p_n^{\,2} - 2(N-k_{n-1})q_n^{\,2} + k_n p_n^{\,2} + (N-k_n)q_n^{\,2} + 2(q_n - p_n)\sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} x_i$$

$$J_{n-1} - J_n = k_{n-1}p_n^{\,2} + (N-k_{n-1})q_n^{\,2} - k_n p_n^{\,2} - (N-k_n)q_n^{\,2} - 2(q_n - p_n)\sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} x_i$$

$$= (k_n - k_{n-1})(q_n^{\,2} - p_n^{\,2}) - 2(q_n - p_n)\sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} x_i$$

$$= (q_n - p_n)\left\{(k_n - k_{n-1})(q_n + p_n) - 2\sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} x_i\right\}$$

ここで、$i \leqq k_n$ であれば $x_i \leqq \dfrac{p_{n-1}+q_{n-1}}{2} = \dfrac{p_n+q_n}{2}$ であるから

$$\therefore 2\sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n} x_i \leqq (k_n - k_{n-1})(p_n + q_n) \qquad \therefore J_n \leqq J_{n-1}$$

$k_n < k_{n-1}$ のとき

$$\sum_{i=1}^{k_n} x_i = \sum_{i=1}^{k_{n-1}} x_i - \sum_{i=k_n+1}^{k_{n-1}} x_i = k_{n-1}p_n - \sum_{i=k_n+1}^{k_{n-1}} x_i \qquad \sum_{i=k_n+1}^{N} x_i = \sum_{i=k_{n-1}+1}^{N} x_i + \sum_{i=k_n+1}^{k_{n-1}} x_i = (N-k_{n-1})q_n + \sum_{i=k_n+1}^{k_{n-1}} x_i$$

であるから

$$J_n = \sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2} - 2p_n\left(k_{n-1}p_n - \sum_{i=k_n+1}^{k_{n-1}} x_i\right) - 2q_n\left\{(N-k_{n-1})q_n + \sum_{i=k_n+1}^{k_{n-1}} x_i\right\} + k_n p_n^{\,2} + (N-k_n)q_n^{\,2}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2} - 2k_{n-1}p_n^{\,2} - 2(N-k_{n-1})q_n^{\,2} + k_n p_n^{\,2} + (N-k_n)q_n^{\,2} - 2(q_n - p_n)\sum_{i=k_n+1}^{k_{n-1}} x_i$$

$$J_{n-1} - J_n = k_{n-1}p_n^{\,2} + (N-k_{n-1})q_n^{\,2} - k_n p_n^{\,2} - (N-k_n)q_n^{\,2} + 2(q_n - p_n)\sum_{i=k_n+1}^{k_{n-1}} x_i$$

$$= 2(q_n - p_n)\sum_{i=k_n+1}^{k_{n-1}} x_i - (k_{n-1} - k_n)(q_n^{\,2} - p_n^{\,2})$$

$$= (q_n - p_n)\left\{2\sum_{i=k_n+1}^{k_{n-1}} x_i - (k_{n-1} - k_n)(q_n + p_n)\right\}$$

ここで、$i > k_n$ であれば $x_i > \dfrac{p_{n-1}+q_{n-1}}{2} = \dfrac{p_n+q_n}{2}$ であるから

$$\therefore 2\sum_{i=k_n+1}^{k_{n-1}} x_i > (k_{n-1} - k_n)(p_n + q_n) \qquad \therefore J_n < J_{n-1}$$

以上により、いずれにしても $J_n \leqq J_{n-1}$ が示された。（証明終）

(3)
k_nは$1 \leqq k_n \leqq N-1$なる自然数であり、k_nがとり得る値は有限個である。
k_nが決まれば、p_n, q_nがそれぞれただ 1 つに決まるので、k_n, p_n, q_nの組は有限個である。
k_n, p_n, q_nの組が決まれば、J_nはただ 1 つに決まるので、J_nがとり得る値は有限個である。

(2)より、$J_1 \geqq J_2 \geqq \cdots \geqq J_{n-1} \geqq J_n$であるが、$J_n$がとり得る値は有限個であるから、$n$が十分大きくなり、$J_n$がとり得る値の最小値に達すれば、それ以上小さくなることができないので、$J_{n-1} = J_n$となる。

今、$n \geqq 2m-1$において、$J_{n-1} = J_n$が成立しているとする。

$p_n = p_{n-1}, q_n = q_{n-1}$であり、$k_n$は$x_i = \dfrac{p_{n-1} + q_{n-1}}{2}$を満たす$x_i$の個数。

$k_{n+1} = k_n$であり、したがって$p_{n+1} = p_n = p_{n-1}, q_{n+1} = q_n = q_{n-1}$である。

$p_{n+2} = p_{n+1}, q_{n+2} = q_{n+1}$であり、$k_{n+2}$は$x_i = \dfrac{p_{n+1} + q_{n+1}}{2}$を満たす$x_i$の個数。

ここで、$\dfrac{p_{n+1} + q_{n+1}}{2} = \dfrac{p_{n-1} + q_{n-1}}{2}$であるから、$k_{n+2} = k_n$であり、すなわち$k_{n+2} = k_{n+1} = k_n$。
以下帰納的に、$J_{n-1} = J_n, p_n = p_{n-1}, q_n = q_{n-1}, k_n = k_{n-1}$がわかる。
以上により示された。（証明終）