2008年東大文$\boxed{4}$

(1)

数学的帰納法で示す。

$c_n = a_n - \dfrac{n(n-1)}{2}p^2 - np,\ d_n = b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$と置く。

$c_1 = a_1 - p = 0,\ d_1 = b_1 - p - 1 = 0$であるから、$n=1$のとき成立。

$n=k$のとき、$c_k = a_k - \dfrac{k(k-1)}{2}p^2 - kp,\ d_k = b_k - k(k-1)p^2 - kp - 1$は$p^3$で割り切れると仮定する。

$$
\begin{aligned}
c_{k+1} &= a_{k+1} - \frac{k(k+1)}{2}p^2 - (k+1)p = a_k + pb_k - \frac{k(k+1)}{2}p^2 - (k+1)p \\
&= c_k + \frac{k(k-1)}{2}p^2 + kp + p\left\{d_k + k(k-1)p^2 + kp + 1\right\} - \frac{k(k+1)}{2}p^2 - (k+1)p \\
&= c_k + pd_k + k(k-1)p^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_{k+1} &= b_{k+1} - k(k+1)p^2 - (k+1)p - 1 = pa_k + (p+1)b_k - k(k+1)p^2 - (k+1)p - 1 \\
&= p\left\{c_k + \frac{k(k-1)}{2}p^2 + kp\right\} + (p+1)\left\{d_k + k(k-1)p^2 + kp + 1\right\} - k(k+1)p^2 - (k+1)p - 1 \\
&= pc_k + (p+1)d_k + \frac{3k(k-1)}{2}p^3
\end{aligned}
$$

仮定および$\dfrac{k(k-1)}{2}$が整数であることから、$c_{k+1},\ d_{k+1}$はp^3で割り切れる。

したがって$n=k+1$でも成立。以上により示された。(証明終)

(2)

$$c_p = a_p - \frac{p(p-1)}{2}p^2 - p^2 = a_p - \frac{1}{2}p^2(p^2 - p + 2)$$

$p = 2q+1\,(q \geqq 1)$とすると

$$c_p = a_p - \frac{1}{2}(2q+1)^2\left\{(2q+1)^2 - (2q+1) + 2\right\} = a_p - (2q+1)^2(2q^2 + q + 1)$$

$$\therefore a_p = c_p + (2q+1)^2(2q^2+q+1) = c_p + q(2q+1)^3 + (2q+1)^2 = c_p + qp^3 + p^2$$

(1)より、c_pはp^3で割り切れるので、a_pはp^2で割り切れる。

一方、$p \geqq 3$より、a_pをp^3で割ると余りはp^2になり、p^3で割り切れない。

以上により示された。(証明終)