

2008 年東大理 2

(1)

樹形図で考える。

1 回の操作で 4 枚とも同じ色になることはない。

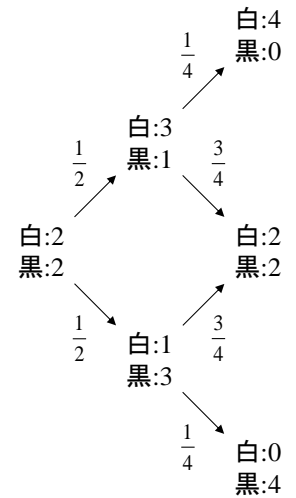
2 回の操作後、確率  $\frac{1}{4}$  で 4 枚とも同じ色になり、確率  $\frac{3}{4}$  で最初の状態に戻る。

以後、奇数回の操作後に 4 枚とも同じ色になることはない。

$2k$  回の操作後、初めて 4 枚とも同じ色になる確率は  $\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \frac{1}{4}$

求める確率は

$n$  が奇数のとき 0、 $n$  が偶数のとき  $\frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1}$  ……(答)



(2)

2 回以下の操作で 6 枚とも同じ色になることはない。

3 回以上の奇数回後、6 枚とも同じ色になるか、

一方は 4 枚、もう一方は 2 枚になるか、いずれかである。

偶数回の操作後に 6 枚とも同じ色になることはない。

$2k+1$  回 ( $k \geq 1$ ) の操作後、一方は 4 枚、もう一方は 2 枚であるとする。

このとき、 $2k+3$  回の操作後、確率  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$  で 6 枚とも同じ色になり、

確率  $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{17}{18}$  で一方は 4 枚、もう一方は 2 枚のままである。

1 回の操作後、一方は 4 枚、もう一方は 2 枚である確率は 1 であるから、

$2k+1$  回 ( $k \geq 1$ ) の操作後、初めて 6 枚とも同じ色になる確率は  $\left(\frac{17}{18}\right)^{k-1} \frac{1}{18}$

求める確率は

$n$  が偶数および 1 のとき 0、 $n$  が 3 以上の奇数のとき  $\frac{1}{18} \left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-3}{2}}$  ……(答)

