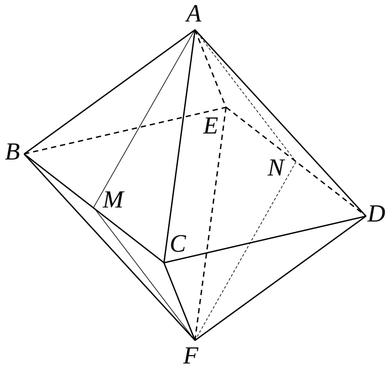
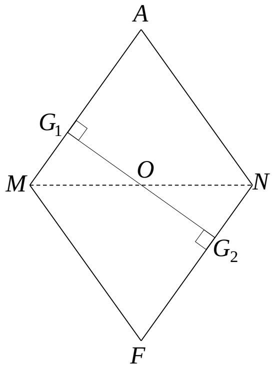
2008年東大理$\boxed{3}$

(1)

右図の正八面体 $ABCDEF$ において、頂点 A, F と、辺 BC, DE の中点 M, N を通る断面を考える。

互いに平行な 2 面 ABC, DEF は逆向きであり、ABC の重心 G_1 と、DEF の重心 G_2 は、それぞれ線分 AM, FN 上にある。





$$AM=FN=\frac{\sqrt{3}}{2},\ AG_1:G_1M=FG_2:G_2N=2:1 \text{ であるから} \quad \therefore G_1M=G_2N=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

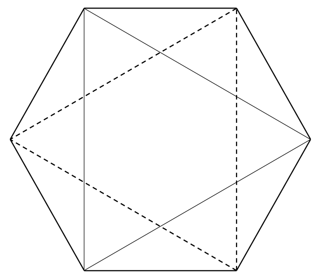
$$MO=ON=\frac{1}{2} \text{ より、} AM:MO=OM:MG_1=\sqrt{3}:1 \text{ であるから} \quad \therefore \triangle AMO \backsim \triangle OMG_1$$

$\angle OG_1M$ は直角であり、G_1G_2 は 2 面 ABC, DEF に対し垂直である。

これより、正八面体の 1 つの面を下にして真上から見ると、

平行な 2 面の重心が重なるので、図のような正六角形に見える。

この正六角形の 1 辺の長さは $\quad \dfrac{1}{2\cos 30^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



(2)

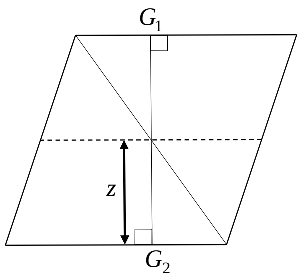
$AO:MO=\sqrt{2}:1$ であるから

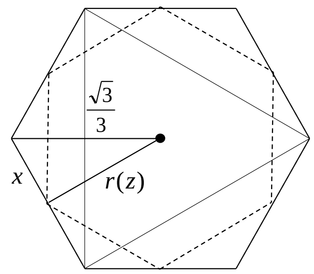
$$G_1O=\sqrt{2}G_1M=\frac{\sqrt{6}}{6} \quad \therefore G_1G_2=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

面 DEF を下にして、G_2 から z 離れた位置における正八面体の断面を考える。上から見た平面図上に断面を描くと、破線のような六角形になる。

G_1G_2 は正六角形の 1 辺の $\sqrt{2}$ 倍であるから、

図上の長さ x は、$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}z$ と表せる。





回転体の断面は、軸 G_1G_2 から各頂点までの距離 $r(z)$ を半径とする円である。余弦定理より

$$\{r(z)\}^2=x^2+\frac{1}{3}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}x\cos 60^\circ=x^2-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}z^2-\frac{\sqrt{6}}{6}z+\frac{1}{3}$$

求める体積は

$$\pi\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\{r(z)\}^2dz=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\left(\frac{1}{2}z^2-\frac{\sqrt{6}}{6}z+\frac{1}{3}\right)dz=\left[\frac{1}{6}z^3-\frac{\sqrt{6}}{12}z^2+\frac{1}{3}z\right]_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{27}-\frac{\sqrt{6}}{18}+\frac{\sqrt{6}}{9}\right)=\frac{5\sqrt{6}}{54}\pi \quad \cdots\cdots(\text{答})$$